



Theorie

der endlichen Gruppen

von

eindeutigen Transformationen in der Ebene.

Von

S. Kantor.

Berlin.
Mayer & Müller.
1895.

Vorwort.

»Φιλεῖ γὰρ ὀκνεῖν πρᾶγμ'
ἀνὴρ πράσσων μέγα.«

Dass der Gegenstand dieser Schrift eine vollständige Erledigung erfordert, darüber ist kein Zweifel, dass er sie aber durch diese Schrift gefunden, wird ein Blick auf den letzten Paragraphen lehren. Einer Entschuldigung bedarf es nur, dass gerade ich in einer Zeit, die an kühnen und erfolgreichen Analytikern so reich ist, es unternommen habe, diesen Gegenstand in einer wesentlich geometrischen Behandlung zur Veröffentlichung zu bringen. Aber meine vorhergehenden Arbeiten über periodische Transformationen [1]) gaben mir von selbst den Anstoss, die hier gestellten Probleme zu fassen, und gaben mir die Methoden in die Hand, sie endgültig zu lösen und dadurch eine feste Basis für die Theorie und eine Uebersicht über den überhaupt zu erforschenden Inhalt zu liefern.

Die vielfachen Zusammenhänge mit analytischen Theorieen habe ich nur hervortreten lassen, um auf sie aufmerksam zu machen. In dieser Hinsicht ist das Buch unvollständig, wird aber früher oder später ergänzt werden.

Der Verlagshandlung sage ich für die mit der Herausgabe dieses Buches verbundenen Opfer meinen besten Dank.

---

1) Preisschrift der Akademie zu Neapel 1884—89: »Premiers fondements d'une théorie des transformations périodiques univoques.« — Ein Auszug ist im Journal f. d. r. u. ang. Math. Bd. CXIV p. 50 erschienen unter dem Titel: »Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene.«

»Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene.« Acta Math. Bd. XIX. p. 115.

S. Kantor.

Einleitung.

Analytische Probleme haben den ersten Anstoss zu einer systematischen Behandlung der endlichen Gruppen geometrischer Transformationen, zunächst linearer, gegeben. Einerseits führte die Theorie der linearen Differentlialgleichungen in jenem besonderen Theile, der sich mit der Theorie ihrer algebraischen Integrale beschäftigt, zur Bestimmung der Gruppen von Transformationen, welche die n Integrale (als Variabelen) um die Verzweigungspunkte herum erfahren[1]; andererseits entstand in der Theorie der algebraischen Gleichungen in einem ihrer Theile, nämlich der Auflösung der elliptischen Modulargleichungen, das Bedürfnis, die Gruppe der Periodensubstitutionen, welche zur Transformation eines gegebenen Grades gehört, an einer geometrischen Irrationalität anschaulich zu machen[2]) und von da zum umgebenden Raume überzugehen.

Analytische Methoden waren es dann auch, welche zu einer directen Bestimmung und Untersuchung dieser Gruppen führten, und zwei hievon kommen namentlich in Betracht. Die eine, bisher nur für die Gruppen in zwei homogenen Variabeln verwendet, bedient sich — u. zw. thun dies alle drei Mathematiker, die sie verwenden, mehr oder weniger direct[3]) — der algebraischen Formen, welche durch je eine dieser Gruppen in sich transformirt werden. Es ist wohl kein Zweifel, dass auch die Bestimmung der Gruppen in r Variabeln mittelst dieser Methode möglich sein wird. Die zweite Methode, von Herrn Jordan eingeführt[4]), gründet sich in erster Linie auf die arith-

---

1) L. Fuchs, Cr. J. Bd. 68 u. 81.

2) F. Klein, Math. Ann. XIV und früher IX und XII. Hierzu auch W. Dyck, Math. Ann. XVII.

3) P. Pepin, S. J. in den C. R. 1875; F. Klein, M. A. IX; Fuchs Cr. J. 81 und C. R. 1876, 26. Juni, 3. Juli.

4) C. Jordan, Cr. J. 84 und Atti dell' Accademia di Napoli 1879.

1*

metischen Eigenschaften der Gruppen, indem sie die geometrischen Bedingungen einführt, um die diophantischen Lösungen zu beschränken. Die Hauptbedingung ist, die Büschel vertauschbarer Transformationen zu kennen. Herr Jordan selbst hat die Methode vollständig nur bis $\nu = 3$ und beinahe vollständig für $\nu = 4$ durchgeführt.

Um so bemerkenswerther ist es daher, dass sich das Problem der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen irgend beliebiger Ordnung und Art mittelst rein geometrischer Methoden wenigstens in der Ebene vollständig und bis ins letzte Detail erledigen lässt. Es ist dasselbe Verfahren, das sich mir bereits in der Bestimmung der einzelnen periodischen Transformationen von Erfolg bewiesen hat. Man kann es als eine Verallgemeinerung in gewissem Sinne der oben erwähnten algebraischen Methoden bezeichnen, obzwar es nicht mehr den durchaus formalen Character jener besitzt.

Ich gelange mittelst dieses Verfahrens dazu, eine vollständige Uebersicht über die Gruppen zu gewinnen, welchen alle existirenden endlichen Gruppen birationaler Transformationen durch birationale Transposition äquivalent gemacht werden können und mit Hilfe der in den meisten Punkten hinreichend ausführlichen Untersuchung in meiner Preisschrift gelingt es, diese Gruppentypen gründlich zu durchforschen.

Ich beginne im ersten Paragraphen mit einigen ganz allgemeinen Betrachtungen über lineare Substitutionen, als deren specielle Fälle die l. c. in Anwendung gebrachten aufzufassen sind, um dann in den folgenden Paragraphen des ersten Theiles die Aequivalenztheorie darzulegen und die Typen der Gruppen von Characteristiken einzeln zu untersuchen. Dabei bin ich in Folge des Wunsches, einen ganz allgemeinen Gegenstand auf möglichst wenig Blättern zu erledigen, Schwierigkeiten in der Darstellung begegnet. Der gütige Leser möge die hieraus entstandenen Mängel in der Form entschuldigen.

Im dritten Theile habe ich des Raumes wegen die geometrische Discussion in den §§ 4—7 durch die algebraische Methode der canonischen Form der linearen Substitutionen ersetzt, die ich bereits in der Preisschrift zweimal angewendet habe und welche sich für die Behandlung dieses Gegenstandes äusserst geeignet erweist.

I. Theil.

Die endlichen Gruppen von Charakteristiken.

§ 1. Ueber gewisse lineare Substitutionen mit ganzen Coefficienten.

1. Es sei ein System von Curven C_s mit σ Vielfachheiten $a_1 \dots a_\sigma$ gegeben und man denke sich über diesen σ Punkten σ Singularitätencomplexe (b_i, $a_{i1} \dots a_{i\sigma}$, $i = 1, \dots \sigma$), welche unter einander so differiren, dass keiner ein Vielfaches eines anderen, noch eine lineare Combination von mehreren unter ihnen sei. Ich nenne sie die σ Fundamentalcomplexe. Hienach habe C_n die Vielfachheiten $y_1, \dots y_\sigma$ in $a_1, \dots a_\sigma$. Man rechne die Schnittpunktezahlen von C_n mit diesen σ Complexen und bezeichne sie mit $y'_1 \dots y'_\sigma$ und die Schnittpunktezahl von C_n mit den C_s sei n'. Man wird so unter den Zahlen $n', y'_1, \dots y'_\sigma$ und $n, y_1, \dots y_\sigma$ lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten haben:

$$1)\quad \begin{aligned} n' &= sn - a_1 y_1 - a_2 y_2 - \cdots - a_\sigma y_\sigma \\ y'_1 &= b_1 n - a_{11} y_1 - a_{12} y_2 - \cdots - a_{1\sigma} y_\sigma \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_\sigma &= b_\sigma n - a_{\sigma 1} y_1 - a_{\sigma 2} y_2 - \cdots - a_{\sigma\sigma} y_\sigma \end{aligned}$$

Man wird diesen Gleichungen die Bedingung auferlegen, in ganzen Zahlen umkehrbar zu sein, also die Determinante gleich 1 zu haben.

2. Man kann sich nun ungehindert denken, dass die Zahlen $y'_1 \dots y'_\sigma$ σ anderen Punkten zugewiesen, etwa die Vielfachheiten einer Curve in diesen Punkten seien und n' die Ordnung der Curve sei, sofern n' stets positif ist. In den inversen Gleichungen zu 1) wird man in gewissen Fällen die Coefficienten wieder als Singularitätencomplexe von C_s, und σ Curven deuten können. Man wird insbesondere die Fälle verlangen können, wo die Complexe die entsprechenden seien zu den Punkten $a_1 \dots a_\sigma$, diese als Complexe $n = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = \dots = y_\sigma = 0$ genommen.

Man kann andererseits für den Uebergang von den n', y' zu den n, y eine über σ willkürlichen Complexen construirte Substitution nehmen, welche nicht die Umkehrung von 1) ist. Dies erlaubt, ohne Weiteres die σ Complexe σ Punkten $b_1 \dots b_\sigma$ zuzuweisen. Im Allgemeinen wird dabei unter $a_1 \dots a_\sigma$ und $b_1 \dots b_\sigma$ keinerlei Coordination bestehen und es werden die Fälle zu suchen sein, in denen eine solche

wohl präcisirt ist. Jedenfalls aber kann man die Punkte b_i mit den Punkten a_k coincidiren lassen oder durch Einschaltung neuer Punkte und Einführung neuer Variabeln sie verketten. So wird einer Curve i. A. eine Reihe von Curven entsprechen, aber nur arithmetisch, d. h. nur Singularitätencomplexe und mit dieser Beschränkung wird man auch die Frage der Periodicität von 1) oder einer durch Verkettung wie in der Preisschrift abgeleiteten Substitution stellen können.

3. Die Substitution 1) nebst ihrer coordinirten (ihrer inversen oder nicht) kann Bedingungen unterworfen werden, welche die Veränderlichkeit der ganzen Coefficienten beschränken und sogar so weit, dass nur eine endliche Anzahl möglich ist. Man kann z. B. verlangen, dass sie eine gewisse Anzahl von quadratischen und linearen Formen oder auch von cubischen Formen etc. in sich transformire, wie l. c. die beiden Formen

$$F_2 = n^2 - y_1^2 - \cdots - y_\sigma^2$$
$$F_1 = 3n - y_1 - \cdots - y_\sigma.$$

Es wurde l. c. nachgewiesen, dass in diesem letzteren Falle die σ Fundamentalcomplexe zu je zweien der Form

$$F_{12} = n\nu - \Sigma y_i \eta_i$$

den Wert Null geben und dass die Anzahl der Substitutionen für $\sigma < q$ endlich, sie selbst alle periodisch sind. Es wäre nun wichtig, andere Classen von Substitutionen zu suchen, deren Coefficienten ganzzahlige Functionen gewisser ganzer Parameter sind mit der Eigenschaft, für σ unterhalb einer gewissen Grenze, in endlicher Anzahl vorhanden zu sein [1]) und zu fragen, ob es möglich, sie mittelst STS^{-1} wo S mit T gleiche Definition hat, auf eine Anzahl von Typen zu reduciren.

4. Obzwar 1) zwei Singularitätencomplexe unter einander transformirt, ist sie nicht das Bild einer geometrischen Transformation. Man kann sich jedoch eine hinzu denken. Eine Mannigfaltigkeit M_2^n sei eindeutig auf die Ebene R_2 u. s. w. mittelst der Curven C_s abgebildet. Den Punkten $a_1 \ldots a_\sigma$ werden auf M_2^n Curven $C_{a_1} \ldots C_{a_\sigma}$ und einer Curve $C_n a_1^{y_1} \ldots a_\sigma^{y_\sigma}$ wird auf M_2^n eine Curve $C_{n'}$, entsprechen, welche $C_{a_1} \ldots C_{a_\sigma}$ in $y'_1 \ldots y'_\sigma$ Punkten treffen wird. Sind die σ Fundamentalcomplexe der Ebene richtig gewählt, so werden die $C_{n'}$ und dann

1) Es scheint zu erwarten, dass dies für alle Substitutionen stattfinde, welche eine gewisse Anzahl von ganzzahligen Functionen in σ Variabeln in sich transformiren.

die C_n durch $n', y'_1 \ldots y'_\sigma$ bestimmt [1]). Ganz ebenso kann man den 1) eine geometrische Deutung in R_r und auf M_r^n geben und wird unter $a_1 \ldots a_\sigma$ sei es Punkte, sei es Geraden, sei es R_i verstehen, wobei man sich nicht auf die Curven beschränken muss, welche durch diese R_i gehen, sondern sie auch für M_i^n anwenden kann, welche durch eine gewisse Anzahl R_{i-1} in diesen R_i hindurchgehen oder die R_i nach gewissen Vielfachheiten enthalten.

Eine andere und wichtigere Anwendung ist folgende. Wenn eine M_2^n des Geschlechtes p im R_r eine birationale Correspondenz trägt [2]), so wird diese ein gewisses System ∞^i von Curven $C^{(i)}$ der Fläche in ein anderes System verwandeln und hiebei eine Anzahl Fundamentalpunkte erscheinen lassen. Die Curven $C^{(i)}$ gehorchen also in Ordnung und in Vielfachheiten über gewissen Punkten linearen Substitutionen 1) und es folgt sofort, dass in einer birationalen Correspondenz unter zwei Punktsystemen auf einer Fläche vom Geschlechte p die Anzahl der Fundamentalpunkte dieselbe in den beiden Systemen ist. Die Coefficienten der Substitutionen werden schon auf den unicursalen Flächen anderen Bedingungen als jene in der Ebene unterworfen sein. Dieselbe Deutung gilt noch für die birationalen Correspondenzen unter den Punkten einer M_i^n im R_r, deren Geschlechter $p_1 \ldots p_i$ willkürlich sein mögen.

§ 2. Die Gruppen von birationalen Characteristiken und das Theorem über die Typen.

1. Als Characteristik einer Transformation habe ich die Gesammtheit der Punkte bezeichnet, welche als Fundamentalpunkte oder deren Transformirte auftreten und dieselbe ist geschlossen, wenn diese Punkte in endlicher Zahl vorhanden sind. Jeder Transformation entspricht eine Characteristik, aber nicht umgekehrt. Diese letzteren Characteristiken sind die »illusorischen«. Gleiches gilt für die Gruppen. Man kann über einer Anzahl σ von Punkten eine willkürliche Anzahl von Characteristiken combiniren, welche zufällig werden eine endliche Gruppe bilden können, aber deren Gesammtheit, selbst wenn sie einzeln constructibel wären, nicht existiren mag. Man muss also Gruppen von Characteristiken und Gruppen von Transformationen unterscheiden und hier werden sie unabhängig von einander im ersten und den beiden anderen Theilen behandelt werden. (Vgl. die Anmerkung p. 39).

1) Die Substitution führt hier nicht die F_{12} in sich selbst über.

2) Herr Zeuthen hat zuerst solche birationale Correspondenzen auf Flächen höheren Geschlechtes genau untersucht in Math. Ann. IV p. 21 und dort finden sich die ersten Spuren dieser Substitutionen. Cf. Nöther, Math. Ann. VIII p. 495.

2. Jeder geschlossenen Characteristik über σ Punkten $a_1 \ldots a_\sigma$ entspricht eine der Substitutionen 1) von der Art, wie sie im § 1. n. 3 definirt ist und einer endlichen Gruppe von Characteristiken über σ Punkten eine endliche Gruppe von Substitutionen 1) in $\sigma + 1$ Variabeln. Aber alle diese Substitutionen lassen den Punkt $n = 0$, $y_1 = \ldots y_\sigma = 1$ und die lineare Form $3n - y_1 - \ldots - y_\sigma$ ungeändert, also:

Theorem I. Jede endliche Gruppe von Characteristiken mit σ Punkten liefert eine endliche Gruppe von linearen Substitutionen im $R_{\sigma+1}$, welche einen Punkt und einen R_σ und eine M^1_σ fest lässt.

3. Lemma I. Eine Gruppe von Characteristiken, welche einen Complex n, $y_1 = \ldots y_\sigma = 0$ in sich transformirt, ist nothwendig eine Gruppe von Collineationen unter $a_1 \ldots a_\sigma$.

Theorem II. Jede endliche Gruppe von Characteristiken, welche einen invarianten Singularitätencomplex mit $p = 0$, $u = 2$ gestattet, ist äquivalent mit einer Gruppe von Collineationen.

Man überträgt den invariantiven Complex in den Complex $n = 1$ $y_1 = \ldots = y_\sigma = 0$, und wird eine Gruppe von Characteristiken erhalten, welche diesen Singularitätencomplex in sich transformirt, also eine Gruppe von Collineationen.

Theorem III. Jede endliche Gruppe von Characteristiken welche einen invarianten Complex mit $p = 0$, $u = 1$ gestattet, ist äquivalent einer Gruppe von Characteristiken von Jonquières mit gemeinsamem Punkte (ab).

Beweis. Man überträgt den Complex $p = 0$, $u = 1$ in den Complex $n = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = \ldots y_\sigma = 0$ und wendet die Definition der Charakteristiken von Jonquières an oder das Lemma II: Wenn eine Gruppe von Characteristiken $n = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = \ldots = 0$ in sich überträgt, besteht sie aus Characteristiken von Jonquières.

Theorem IV. Jede endliche Gruppe von Characteristiken, welche einen invarianten Complex $n = 3$, $y_1 = \ldots y_\sigma = 1$ gestattet, wo $\sigma = 6, 7, 8$, ist eine Gruppe von Characteristiken mit 6, 7, 8 Punkten.

Beweis. Es ist nothwendig, dass der Complex durch alle Punkte der Charakteristik einfach gehe, was aus $\Sigma y = 3(n-1)$ folgt.

Theorem V. Jede Gruppe von Characteristiken, welche einen invarianten Complex $3s$, $y_1 = \ldots y_8 = s$ hat, ist eine Gruppe von Characteristiken mit 8 Punkten.

Beweis. Wie in IV muss der Complex einfache Punkte in allen Characteristikpunkten der Gruppe haben.

Theorem VI. Jede Gruppe von Characteristiken, welche einen invarianten Complex mit $p = 1$, $u = 2, 3$ hat, ist äquivalent einer Gruppe von Characteristiken mit 7, 6, Punkten.

Beweis. Gemäss dem Theoreme von Bertini-Martinetti ist der

Complex äquivalent einem der Complexe des Theoremes IV, welches man also anwenden kann.

Theorem VII. Jede endliche Gruppe von Characteristiken besitzt einen invarianten Singularitätencomplex, dessen Geschlecht jede willkürliche Grenze überschreitet, aber sicher > 2 ist.

Beweis. Denn man nehme eine Characteristik der Gruppe. Man wird für diese wie l. c. IV. § 5. Th. X beweisen, dass die Summe aller Transformirten eines willkürlich gegebenen Singularitätencomplexes (z. B. von $n = 1$, $y_1 = \ldots y_\sigma = 0$) einen Complex mit beliebig grossem p bildet, aber sicher $p > 2$. Für einen solchen Complex wird man alle Transformirten durch eine andere Transformation der Gruppe bilden und da gemäss dem Beweise des citirten Theoremes das p der Summe grösser ist als die p der einzelnen Complexe, wird man zu einem Complexe mit noch grösserem p gelangen u. s. f., bis man alle Transformationen der Gruppe erschöpft hat. Indem man sich des Lemmas III bedient: Wenn ein Singularitätencomplex invariant ist für die Characteristiken S_1, S_2, ist er auch invariant für die Characteristik S_1, S_2, so kann man sich auf die 2 Constituenten der Gruppe beschränken.

Definition. Sobald eine Gruppe keinen anderen invarianten Complex als $3s$, $s \ldots s$ gestattet, wird die Gruppe »äquimultipel« genannt werden und sobald sie $y_1 = n - 2s$, $y_1 = \ldots y_\sigma = s$ gestattet, orthanallagmatisch oder Gruppe von Jonquières. In diesen Definitionen ist immer verstanden, dass s jeden ganzzahligen positiven Werth annehmen kann.

Theorem VIII. Durch eine Transposition mit birationaler Matrix, wo die Anzahl der Variabeln sich nicht vermehrt, wird eine äquimultiple Gruppe in eine äquimultiple Gruppe verwandelt.

Beweis. Es reicht hin, es für die quadratischen Transpositionen zu beweisen. Aber man sieht aus den Substitutionen 1), dass $3s$, $s \ldots s$ in einen Complex $3s$, $s \ldots s$ verwandelt wird und jeder nicht äquimultiple Complex in einen nicht äquimultiplen Complex.

Theorem IX. Eine äquimultiple Gruppe mit mehr als 8 Punkten kann nicht endlich sein.

Beweis. Denn für $\sigma = 9$ gibt der Complex $n = 3s$, $y = s$ für alle s $p = 1$ und für $\sigma > 9$ $p < 0$. Die Gruppe würde also nur Complexe mit $p = 1$ besitzen oder gar keinen invarianten Complex, während VIII streng verlangt, dass es invariante Complexe mit $p > 1$ gebe.

Theorem X. Alle Gruppen von Characteristiken über $\sigma < 9$ Punkten sind endlich.

Beweis. Ich habe l. c. bewiesen, dass die Anzahl der Characte-

ristiken über $\sigma < 9$ Punkten endlich ist und zwei beliebige unter ihnen können keine unendliche Gruppe zusammensetzen, da die Zahl σ durch die Zusammensetzung sich nicht vermehrt.

Theorem XI. Wenn eine Gruppe einen Singularitätencomplex in sich transformirt, transformirt sie auch den adjungirten Complex $n-3$, y_i-1 und alle successiven adjungirten Complexe in sich.

Beweis. Denn dies gilt für die einzelnen Characteristiken der Gruppe, in Folge des Lemma III gilt es für die ganze Gruppe.

Theorem XII. Wenn eine Gruppe von Characteristiken den Complex n, $n-2s$, $s \dots s$ reproducirt, ist sie eine orthanallagmatische Gruppe.

Beweis. Mittelst XI leitet man durch Bildung der successiven adjungirten Complexe her, dass die Gruppe auch den Complex $n = 1$, $y_1 = \dots = 0$ reproducirt, also orthanallagmatisch ist.

Theorem XIII. Wenn eine Gruppe von Characteristiken einen Complex $n = s_1 + s_2$, $y_1 = s_1$, $y_2 = s_2$, $y_3 = \dots = y_\sigma = 0$ in sich transformirt, setzt sie sich aus lauter quadratischen Characteristiken zusammen, welche a_1, a_2 als zwei Hauptpunktepaare besitzen, also (aa'), (bb'), $c' \dots c$, oder (ab'), (ba'), $c' \dots c$ für $s_1 = s_2$.

Beweis. Denn oberhalb $m = 2$ gibt es kein Fundamentalsystem, welches einen Kegelschnitt durch zwei Fundamentalpunkte neuerdings in einen Kegelschnitt verwandeln würde und für $m = 2$ genügt auch die primitive Characteristik (ab'), $bc')$, (ca') nicht.

Theorem XIV. Wenn eine Gruppe von Characteristiken einen Complex $n = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = \dots y_\sigma = 0$ oder $n = 3$, $y_1 = \dots y_\sigma = 0$ in sich transformirt, ist sie nothwendig eine Gruppe von Collineationen, welche a_1 fest lässt.

Theorem XV. Jede endliche Gruppe von Characteristiken reproducirt einen Complex $p = 1$, $u = 1, 2, 3, 4, 5$ oder einen Complex $n = s_1 + s_2$, $y_1 = s_1$, $y_2 = s_2$, wenn sie nicht eine Gruppe von Collineationen oder eine orthanallagmatische Gruppe ist.

Beweis. Ich gehe von einem der invariantiven Complexe $p > 1$ aus, welche nach Theorem VII nothwendig in der Gruppe enthalten sind und ich wende auf denselben die Verminderung der adjungirten Complexe an. Wenn man diese Verminderung ohne Unterbrechung fortsetzen kann, gelangt man am Ende entweder zu einem Complexe $n = 3$ oder $n = 2$ oder $n = 1$. Aber wenn man unterwegs auf einen adjungirten Complex stösst, welcher $p = 1$ oder 0 hat, ist es nicht erlaubt fortzusetzen, weil man zu einem zu beschränkten Resultate gelangen könnte, indem man einen Complex $n = 3$, $y_1 \dots y_\sigma = 1$ findet, was keinen Schluss gestattet, während von einem anderen inva-

rianten Complexe ausgehend man zu einem genaueren Resultate gelangen würde. Im Augenblick also, wo man zu $p = 0$ oder 1 gelangt, wird man sich der Transpositionstheoreme und II, III, VI bedienen, was man besser so ausdrückt:

Theorem XVI. Jede endliche Gruppe von Characteristiken ist äquivalent entweder

1. einer Gruppe von Collineationen (Buchstabenvertauschungen) oder
2. einer orthanallagmatischen Gruppe oder
3. einer Gruppe, welche einen Complex $n = 3$, $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ in sich transformirt oder
4. einer Gruppe quadratischer Characteristiken (aa'), (bb'), oder (ab'), (ba').

Beweis. Wir haben im Beweise des vorhergehenden Theorems erschlossen, dass immer einer von gewissen invarianten Complexen existirt. Indem man nun jedesmal so transponirt, dass diese Complexe entweder in einen Complex $n = 3$, $\sigma = 3, 4, \dots 7$ oder in einen Complex $n = 3s$, $y_1 = \dots y_8 = s$ oder in einen Complex $n = s_1 + s_2$, $y_1 = s_1$, $y_2 = s_2$ übertragen werden, kommt man dazu, III, IV, VI, XV anzuwenden.

Theorem XVII. Jeder nicht äquimultiple Complex mit zwei Unbestimmtheiten liefert durch eine passende Wahl der Parameter auch einen Complex mit $p = 0$.

Beweis. Wenn nicht, so wende ich die Verminderung der adjungirten Complexe an. Es ist unmöglich, dass man in allen Fällen bis $n = 3$ fortsetzen könnte, denn sonst wäre der Complex äquimultipel. Man muss also einmal zu einem Complexe mit $p = 0$ oder $p < 0$ gelangen. Der Fall von $p < 0$ kann sich nicht für alle invarianten Complexe darbieten, es muss also wenigstens einmal $p = 0$ sein.

Lemma IV. Es existirt kein Complex $p = 0$, $u = 0$ mit $\sigma < 9$, ausser für $n \leqq 6$.

Theorem XIII. Jede Gruppe mit 3 oder 4 Punkten ist eine Gruppe quadratischer Characteristiken über den 3 oder 4 Punkten.

Theorem XIX. Wenn eine endliche Gruppe von Characteristiken mit $\sigma < 9$ nicht äquimultipel ist, existirt sicher ein invarianter Complex mit $p = 0$, $u \geqq 0$.

Nun kann ein Complex $p = 0$, $u \geqq 1$ immer vervollständigt werden zu einem Complexe $p = 0$, $u = 2$ und auf diesen oder auf den Complex $p = 0$, $u = 1$ kann man die zwei Theoreme I und II anwenden. Aber wenn $p = 0$, $u = 0$ existirt, kann man diesen Complex als Fundamentalcomplex in einem Fundamentalsysteme mit birationaler Matrix anwenden und man wird die Zahl σ der Punkte

um eine Einheit vermindern können. Wenn die so erhaltene Gruppe noch nicht äquimultipel ist, wird man fortgesetzt dasselbe Theorem anwenden und man kann also aussprechen:

Theorem XX. Jede endliche Gruppe von Characteristiken mit $\sigma < 9$ ist äquivalent entweder einer Gruppe von Collineationen oder einer Gruppe von Jonquières oder einer äquimultiplen Gruppe mit $\sigma < 9$.

Theorem XXI. Jede endliche Gruppe von Characteristiken, welche einen invarianten Complex mit $p = 1$, $u = 1$ hat, ist äquivalent einer Gruppe von Characteristiken mit 8 Punkten.

Beweis. Man wendet die Uebertragung an, welche den Complex $p = 1$, $u = 1$ auf einen Complex $n = 3s$, $y_1 = \ldots = y_9 = s$ reducirt und dann der Reihe nach die Theoreme VII, IX, XVIII, XX, IV auf die übrigen vorhandenen invarianten Complexe.

Definition. Die Gesammtheiten aller Characteristiken über 3, 4, ... 8 Punkte bilden endliche Gruppen, welche man die subtotalen Gruppen $M_3, \ldots M_7$ nennen kann, während M_8 die Totalgruppe sein möge. Die endlichen Gruppen, von welchen das Theorem XXIII sprechen wird, werden Untergruppen der Subtotalgruppen sein.

Theorem XXII. Die Gruppen M_2, M_3, M_4, M_5 und jede ihrer Untergruppen lassen sich nach Adjunction eines gewöhnlichen Doppelpunktes in Gruppen von Collineationen oder orthanallagmatische Gruppen transponiren.

Beweis. M_2 wird bei Anwendung eines Doppelpunktes transponirt mittelst quadratischer Transformationen in eine Gruppe homographischer Substitutionen, M_3 bei Anwendung von zwei Doppelpunkten durch cubische Transpositionen in eine Gruppe von Collineationen, M_4 bei Anwendung eines einzigen Doppelpunktes durch $d^2 A_1 A_2 A_3 A_4$, M_5 durch dieselbe Transposition in eine orthanallagmatische Gruppe. Denn durch M_5 verwandelt sich das Büschel $d^2 A_1 \ldots A_5$ in ein Geradenbüschel durch A_5', die transponirte Gruppe wird das Geradenbüschel durch A_5' zum anallagmatischen haben. M_6, M_7, M_8 erlauben eine solche Transposition nicht. Durch Combination von XX, XXI und XXII:

Theorem XXIII. *Jede endliche Gruppe von Characteristiken ist äquivalent einem der folgenden Typen:*

1. *einer endlichen Gruppe von Collineationen* (Buchstabenvertauschungen),
2. *einer endlichen Gruppe Jonquièresscher Transformationen mit* (*ab*)
3. *einer äquimultiplen Gruppe mit 6, 7, 8 Punkten.*

Theorem XXIV. Die allgemeinsten Typen, welchen die Gruppen von Characteristiken der Ebene äquivalent sind, werden in fol-

gender Art erhalten. Man fügt zu einer der Gruppen XXIII oder zu einer ihrer Untergruppen eine willkürliche Zahl N von gewöhnlichen Punkten und constituirt unter diesen eine Gruppe von N' Permutationen, welche isomorph mit oder ohne Meriedrie zur vorgelegten Gruppe ist und verbindet jede Characteristik dieser mit den entsprechenden Permutationen der Gruppe M_i und man erhält so eine Anzahl $\varrho N'$ Substitutionen unter den $\sigma + N$ Punkten.

Beweis. Die so erhaltenen Gruppen sind nicht reductibel auf elementare Gruppen (ohne einfache Cyclen), noch unter einander. Denn die invarianten Complexe müssten dieselben sein für zwei solche äquivalente Gruppen, was unmöglich ist, da die Complexe sind

$$3s,\; s \ldots s_1,\; s_1 \ldots s_1,\; s_2 \ldots s_2,\; \ldots,\; s_i \ldots s_i.$$

§ 3. Die Invarianten der endlichen Gruppen von Characteristiken.

Theorem XXV. Es gibt nur eine endliche Zahl von Singularitätencomplexen mit $p = 0$, u willkürlich, wenn die Zahl der Singularitäten nicht die Zahl 8 überschreitet.

Beweis. Für $u = 2$ habe ich es l. c. bewiesen, indem ich die homaloidalen Netze aufzählte, für $u = 0$ ist es eine Consequenz hievon, weil ja jedem $u = 2\sigma$ Complexe $u = 0$ gehören und umgekehrt. Für $u = 1$ beweist man es durch die Transposition der σ Punkte und indem man von dem Lemma Gebrauch macht, dass die Ueberführung in $n = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = \ldots y_\sigma = 0$ immer möglich ist ohne fremde Punkte in der Basis. Für $n > 2$ weiss man, dass eine Anzahl Typen existirt, welche Herr G. Jung ausdrücklich aufgeschrieben hat [1]. Die Reduction auf die Typen bedient sich nur der Basispunkte und da die Transpositionen, welche über den $\sigma < 9$ Punkten combinirt werden können, in endlicher Zahl sind, kann die Zahl der nicht typischen $p = 0$, u nicht unendlich sein.

Theorem XXVI. Für jede Zahl < 9 von Singularitäten ist die Anzahl der Complexe mit p, u von bestimmten Werthen eine endliche [2].

---

1) G. Jung, Annali di Matematica XVI in »Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche.«

2) $p = 1$, $u = 2$: $8\,C_3\,(1111111) + 28\,C_4\,(22111111) + 56\,C_5\,(22222111) + 56\,C_6\,(32222221)\; 56\,C_7\,(33322222) + 28\,C_8\,(33333322) + 8\,C_9\,(43333333) = 240$

$p = 1$, $u = 3$: $28\,C_3\,(111111) + 168\,C_4\,(22111111) + 168\,C_5\,(2222211) + 168\,C_5\,(32211111) + 560\,C_6\,(33222111) + 56\,C_6\,(3222222) + 420\,C_7\,(33332211) + 336\,C_7\,(43222221) + 840\,C_8\,(43333221) + 168\,C_9\,(44333331) + 168\,C_{10}\,(444444322) + 840\,C_{10}\,(54433332) + 336\,C_{11}\,(54444432) + 420\,C_{11}\,(55443333) + 56\,C_{12}$ (34

1. Beweis. Man beweist es ebenso durch die Typen von Jung, weil auch für auch grosse p, u ihre Anzahl endlich ist.

2. Beweis. Es ist sicher, dass in der Reihe der successiven adjungirten Complexe an einem bestimmten Punkte die Zahl p abzunehmen beginnt und es müsste also für willkürliches u eine unendliche Zahl von Complexen mit kleinerem als dem vorgelegten p existiren und man setzt bis zu einem p fort, für welches man schon die Begrenztheit der Anzahl der Complexe bewiesen hat.

3. Beweis. Jeder Complex kann zusammengesetzt werden durch die Addition von Complexen mit niederen Ordnungen und einem p, das nicht höher als sein eigenes p ist. Indem man so fortfährt, kann man sogar bis zu Complexen mit $p = 0$ kommen und kann aufstellen:

Lemma IV. Jeder Complex p, u kann zusammengesetzt werden durch Addition von Complexen $p = 0$, $u = 0$.

4. Beweis. Für jedes p existirt eine untere Grenze von n und diese Grenze wächst beständig mit p.

Um einen anderen Beweis dieses Theoremes zu geben, will ich ein anderes Theorem einschalten.

Theorem XXVII. Wenn ein Singularitätencomplex von σ Punkten, $n, y_1 \ldots y_\sigma$, die Zahlen p, u besitzt, so hat der Complex $N-n, s-y_1, \ldots s-y_\sigma$, wo

$$N = \frac{6(n-p+1)}{9-\sigma}, \quad s = \frac{2(n-p+1)}{9-\sigma}$$

dieselben Zahlen p, u.

Beweis. Wenn man in

$$1) \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{y(y-1)}{2} = p, \quad \frac{n(n+3)}{3} - \Sigma \frac{y(y+1)}{2} = n$$

statt $n, y_1 \ldots y_\sigma$ einsetzt $N-n, \frac{N}{3} - y_\sigma$, wird man für die Differenz dieser beiden Ausdrücke erhalten

$$\frac{9-s}{3} N - (n-p+1)$$

444446) + 560 C_{12} (55544433) + 168 C_{13} (55555443) + 168 C_{14} (65555544) + 28 C_{15} (66555555) = 5824

$p = 2$, $u = 4$: 8 C_4 (21111111) + 70 C_5 (22221111) + 168 C_6 (32222211) + 8 C_7 (42222222) + 280 C_7 (33322211) + 280 C_8 (22223334) + 56 C_0 (33333321) + 520 C_9 (44333322) + 56 C_{10} (33333345) + 280 C_{10} (44443332) + 280 C_{11} (44443335) + 8 C_{11} (44444442) + 168 C_{12} (55444443) + 70 C_{13} (55554444) + 8 C_{14} (55555554) = 2160.

und damit dies gleich sei $n-p+1$, muss $N = \frac{6(n-p+1)}{q-\sigma}$ sein. Dies in die Summe von 1) eingeführt, gibt

$$(9-\sigma)\frac{N^2}{9} - 2\frac{N}{3}(n-p+1) + n + p - 1)$$

und damit dies gleich $n+p-1$ sei, muss in der That nur derselben Bedingung genügt werden.

Allgemeiner: Wenn ein Complex $n, y_1 \ldots y_\sigma$ die Zahlen p, u hat und die zwei Zahlen N', s' die Relationen

$$N^2 - 2Nn + 2s'\Sigma y = \sigma s^2$$
$$3N - \sigma s' = 2(n-p+1)$$

befriedigen, so wird

$$N-n,\ s'-y_1,\ \ldots\ s'-y_\sigma$$

dieselben Zahlen p, u besitzen.

Es ist nun eine Folge der obigen Eigenschaft (XXVII) dass die Zahlen der Complexe mit vorgelegten p, u eine Art von Periodicität aufweisen wenigstens für $\sigma = 6, 7, 8$ wo man die Werte erhält

$$N = 2(n-p+1),\quad s = \frac{2(n-p+1)}{3};$$
$$N = 3(n-p+1),\quad s = n-p+1;$$
$$N = 6(n-p+1),\quad s = 2(n-p+1).$$

Denn die Anzahl der möglichen Complexe hängt nur von Vertheilung der Vielfachheiten in gleich vielfache Grüppchen her und diese ist für zwei solche complementäre Complexe dieselbe.

Theorem XXVIII. Alle Characteristiken von M_6, M_7, M_8 vertauschen die Complexe $p = 0$, $u = 0$ oder $p = 0$, $u = 1$, allgemein p, u, unter einander.

Beweis mittelst der Invarianz der Formen F_1, F_2.

Theorem XXIX. Die Gruppe, welche durch M_σ unter den Complexen $p = 0$, $u = 0$ oder $u = 1$, oder $u = 2$ hervorgerufen wird, ist einfach transitif.

Beweis. Denn man kann eine Characteristik schreiben, welche einen Punkt a_1 in einen willkürlichen Complex von z_{00}^σ (Gesammtheit der Complexe 0,0) verwandelt und um einen Complex α_1 in einen anderen α_2 zu verwandeln, wird man eine Characteristik S aufstellen mit a_1 in α_1 und S_1 mit a_1 in α_2: $S^{-1}S_1$ wird α_1 in a_1 übertragen. Aber die Form F_{12} hat nicht denselben Werth für alle möglichen

Complexpaare von z_{00}^{σ}, daher kann die Gruppe nicht zweifach transitif sein. Ebenso für $u = 1, 2$.

Theorem XXIX. Damit eine Permutation unter den Complexen $p = 0$, $u = 0$ eine von den durch eine Characteristik von M_{σ} hervorgerufenen sei, ist nothwendig und hinreichend, dass der Werth von F_{12} für zwei beliebige dieser Complexe gleich dem Werthe von F_{12} für die zwei Complexe sei, welche durch die Permutation zu Nachfolgern gemacht wurden.

Beweis. Ist die Bedingung befriedigt, so entsprechen zwei Punkten a_i, a_k zwei Complexe von z_{00}^{σ}, welche F_{12} den Werth 0 geben und die so resultirenden Complexe geben einer birationalen Matrix statt, welche dann die ganze Permutation unter $z_{0,0}^{\sigma}$ bestimmt.

Theorem XXX. Man kann auf unendlich viele Arten $\sigma + 1$ Complexe finden, welche die Eigenschaft besitzen, dass jeder Complex eindeutig bestimmt ist durch die σ Werthe φ_{12}^{σ}, welche er mit jenen der Form F_{12} gibt.

Beweis. Diese Complexe geben σ Gleichungen

$$m n^{(i)} - y_1 y_1^{(i)} - \ldots - y_{\sigma} y_{\sigma}^{(i)} = \varphi_{12}^{(i)}$$

durch welche man die Zahlen $m, y_1 \ldots y_{\sigma}$ bestimmen kann. Die Complexe werden verschiedene p, u haben können und alles kommt darauf an, die σ Complexe so zu bestimmen, dass die Determinante

$$E = \begin{vmatrix} n^{(1)} & y^{(1)} & \ldots y^{(1)} \\ n^{(2)} & y_1^{(2)} & \ldots y_{\sigma}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n^{(\sigma+1)} & y^{(\sigma+1)} & \ldots y^{(\sigma+1)} \end{vmatrix}$$

gleich $+1$ oder -1 ist.

Corollar. Die $\sigma + 1$ Complexe haben die ersichtliche Eigenschaft, dass kein Punkt a_i existirt, welcher dieselbe Vielfachheit in allen $\sigma + 1$ Complexen habe wie ein zweiter Punkt a_k. Denn sonst würde die Determinante E den Wert 0 haben.

Theorem XXXII. Die σ Punkte $a_1 \ldots a_{\sigma}$ sind ein σ-System, welches der Bedingung XXX genügt unter Hinzunahme von $n = 3$, $y_1 = \ldots = y_{\sigma} = 1$.

Die Complexe sind

$$\begin{aligned} n &= 0, \quad -1, \quad 0 \ldots \quad 0 \\ n &= 0, \quad 0, \quad -1 \ldots \quad 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n &= 0, \quad 0, \quad 0, \ldots -1 \end{aligned}$$

Der $(\sigma + 1)$ liefert die Ordnung des vorgelegten Complexes und die σ Complexe liefern die Vielfachheiten $y_1 \ldots y_\sigma$.

Es ist auch hervorzuheben, dass durch die Vielfachheiten $y_1 \ldots y_\sigma$ und durch p, u die Ordnung m eindeutig bestimmt ist. σ Complexe, welche mit $n = 3$, $y_1 = \ldots = y_\sigma = 2$ der Bedingung XXX genügen, können ein bestimmendes σ-System heissen. Unter diesen σ-Systemen sind jene zu bemerken, wo alle σ Complexe $p = 0$, $u = 0$ haben und wo diese σ Complexe wechselseitig $F_{12} = 0$ machen. Ich nenne sie die fundamentalen σ-Systeme. Der Begriff der Characteristik sagt:

Theorem XXXIII. Für zwei fundamentale σ-Systeme existirt immer eine und nur eine Characteristik, welche das erste σ-System in das zweite transformirt und hiebei noch eine gewisse Ordnung der Complexe bewahrt. Die Gruppe unter den σ-Systemen mit $p = u = 0$ ist einfach transitif.

Theorem XXXIV. Unsere Art, die birationalen Characteristiken zu definiren, ist also nichts anderes als unter den σ-Systemen eines auszuzeichnen und die anderen σ-Systeme durch die Werthe von F_{12} zu definiren, welche ihnen bezüglich jenes ausgezeichneten entsprechen.

Beweis. Dies folgt aus der Definition, wenn das σ-System das aus XXXII ist und man beweist es für jedes andere, indem man durch zwei Paare von σ-Systemen zusammensetzt, welche eines aus XXXII gemeinsam haben.

Theorem XXXV. Zwei Characteristiken von M_σ sind äquivalent, wenn die entsprechenden Permutationen unter z^σ_{00} oder z^σ_{01} oder z^σ_{02} ähnlich sind.

1. Beweis. Die Gruppe enthält keine anderen Substitutionen als jene, welche das σ-System $a_1 \ldots a_\sigma$ in ein anderes σ-System transformiren und zwei ähnliche Substitutionen sind in einander transformirt durch eine Substitution der Gruppe. Aber diese Substitution ist das Bild oder die Wirkung einer Characteristik und daher überträgt diese Characteristik die eine der zwei gegebenen in die andere.

2. Beweis. Man beweist es zuerst für die involutorischen Characteristiken [1]) und dann für die Collineationen unter den Punkten $a_1 \ldots a_\sigma$ und jede Characteristik kann zusammengesetzt werden durch eine involutorische Characteristik und eine Collineation. Ebenso:

Theorem XXXVI. Zwei Gruppen von Characteristiken, Unter-

---

1) Der Beweis für diese würde mehr Raum beanspruchen, als ihm in dieser Arbeit zugewiesen werden kann.

gruppen von M_σ, sind äquivalent durch birationale Transposition, wenn die entsprechenden Untergruppen unter z_{00}^σ oder z_{01}^σ oder z_{02}^σ ähnlich sind.

Und weil man jedes fundamentale σ-System in ein anderes durch eine birationale Characteristik übertragen kann, schliesst man:

Theorem XXXVII. In einer M_σ-Substitution unter den Complexen z_{00}^σ haben die σ-Systeme ihre σ Complexe in $\sigma - \lambda$ Cyclen gewisser Indices derart, dass diese $\sigma - \lambda$ Indices dieselben sind für alle Systeme.

Und man kann XXXIV wie folgt vervollständigen:

Theorem XXXVIII. Unser Problem, die Classen (oder Typen) nicht äquivalenter Characteristiken über σ Punkten zu finden, ist identisch mit jenem, die nicht gleichberechtigten Substitutionen unter der Substitutionengruppe der $z_{p,n}^\sigma$ zu finden [1]).

Theorem XXXIX. Für jede Zahl $\sigma > 8$ ist die Zahl der Complexe p, u unendlich.

Beweis. L. c. ist bewiesen, dass es unendlich viele Characteristiken gibt und ein Complex p, u wird durch diese in einen Complex p, u mit denselben Punkten verwandelt und da die Zahl der Characteristiken, welche ihn in sich verwandeln, endlich ist (s. l. c. IV § 6) ausgenommen $n = 3$, $y_1 = \ldots = y_\sigma = 1$, so ist das Theorem wahr.

Theorem XL. Die Paare von Complexen p, u mit einem gewissen Werthe von F_{12} bilden eine Resolvente der Gruppe M_8 ebenso wie die Tripel mit einer bestimmten Vertheilung der Werthe von F_{12} über die drei Complexe mit vorgeschriebenen p, u.

Eine andere Resolvente ist gebildet durch die Paare oder die l-tupel von Complexen, welche eine Summe $3s$, $s \ldots s$ bilden, da die Summe mehrerer Complexe in die Summe der Transformirten dieser Complexe transformirt ist.

5. Wie wir sahen, dass die σ-Systeme $p = 0$, $u = 0$, welche die Eigenschaft besitzen, zu zweien $F_{12} = 0$ zu machen, Wichtigkeit haben für die birationalen Transformationen, so ist es möglich, dass die σ-Systeme mit gegebenen p, u und welche alle $\binom{\sigma}{2}$ Werthe von F_{12} gleich c haben, eine geometrische Deutung gestatten werden.

---

1) Wegen dieses Problemes der nicht gleichberechtigten Substitutionen vgl. man die Untersuchungen von Herrn Walther Dyck (»Gruppentheoretische Studien« Math. Ann. XXII).

§ 4. Untersuchung der Gruppen M_2, M_3, M_4, M_5.

1. Die Gruppe M_1. Seien a_1, a_3 die zwei festen Hauptpunkte. Nimmt man eine willkürliche Zahl von Punkten $A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, \ldots A_3^{(\nu)}$ und unterscheidet willkürlich zwei derselben A_3, A_3' als die übrigen Hauptpunkte, so kann man voraussetzen, dass alle Einschaltungen zwischen diesen zwei Punkten zu den Punkten $A_3^{(\varrho)}$ gehören. Die anderen Punkte $A_3^{(1)} \ldots A_3^{(\nu)}$ seien homographisch unter einander verbunden. Man kann sogar alle möglichen Paare von Punkten A fortsetzen und alle denkbaren Permutationen unter den Punkten $A_3^{(1)} \ldots A_3^{(\nu)}$ als Verkettungen. Um die Natur der Zusammensetzung dieser Gruppe zu verstehen, muss man sich denken, dass jede Verkettung $A_3^{(\nu)} \ldots A_3^{(\nu)}$ durch die Gerade $a_1 a_2$ zu einem Cyclus derart vervollständigt ist, dass man an Stelle von birationalen Substitutionen (mit $m = 2$) unter ν Elementen überall homographische Substitutionen unter $\nu + 2$ Dingen hat. In der That liefert die Transposition mittelst $(d\, a_1 a_2)^2$ eine Gruppe von Collineationen unter den Punkten $d\, A_3^{(\nu)} \ldots A_3^{(\nu)}$. Umgekehrt:

Theorem XLI. Wenn man eine ganz willkürliche Gruppe von Permutationen unter n Elementen hat, kann man ein beliebiges der n Elemente absondern, indem man ihm die Bedeutung der Geraden $a_1 a_2$ zuschreibt. Dann wird man das Muster für die Zusammensetzung einer Gruppe M_2: $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ haben. Die Gruppen $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_1)$ leiten sich daraus her durch Adjunction des Paares $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_1)$ zu einer Untergruppe der vorhergehenden Gruppe M_2, welche auch M_2 selbst sein kann.

Corollar. Die einzigen invarianten Complexe der Totalgruppe sind n, s, s, $n - 2s \ldots n - 2s$.

2. Die Gruppe M_3. Der primäre Typus enthält nur die Characteristiken $(a_1 a_1)$, $a_2 a_2)$, $(a_3 a_3)$; $a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, $(a_3 a_1)$; $(a_1 a_3)$, $(a_2 a_1)$, $(a_3 a_2)$; $(a_1 a_1)$, $(a_2 a_3)$, $(a_3 a_2)$; $(a_1 a_3)$, $(a_2 a_2)$, $(a_3 a_1)$; $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_1)$, $(a_3 a_3)$; und die Collineationen a_1 in a_1, a_2 in a_2, a_3 in a_3, a_1 in a_2, a_2 in a_3, a_3 in a_1; a_1 in a_3, a_2 in a_1, a_3 in a_2; a_1 in a_1, a_2 in a_3, a_3 in a_2; a_1 in a_3, a_2 in a_2, a_3 in a_1; a_1 in a_2, a_2 in a_1, a_3 in a_3.

Theorem XLII. Die Gruppe M_3 hat die Basis $(a_1 a_1)$ $(a_2 a_2)$ $(a_3 a_3)$; a_1 in a_1, a_2 in a_3, a_3 in a_2; a_1 in a_3, a_2 in a_2, a_3 in a_1.

3. Die Gruppe M_4. Die Characteristiken aus l. c. II § 26 $m = 1$, § 24 $m = 2$, § 16 $m = 1, 2$, § 31 I. II., jene von M_3 und die 24 Collineationen unter den 4 Punkten geben die 120 Characteristiken der Gruppe M_4.

Theorem XLIII. Die Gruppe M_4 ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der 120 Substitutionen unter 5 Buchstaben.

1. Beweis. Ich wende die Methode des § 2 an und zerlege jede Characteristik in eine involutorische Characteristik und in eine Collineation. So erhält man alle Characteristiken, indem man successive zusammensetzt $J_0 = 1 \mid J_1 = (a_2 a_2)(a_3 a_3)(a_4 a_4)$, a_1 in $a_1 \mid J_2 = (a_1 a_1)(a_3 a_3)(a_4 a_4)$, a_2 in $a_2 \mid J_3 = (a_1 a_1), (a_2 a_2), (a_4 a_4)$, a_3 in $a_3 \mid J_4 = (a_1 a_1), (a_2 a_2), (a_3 a_3)$, a_4 in a_4 mit der Gruppe H_4 der Collineationen S unter den 4 Punkten zusammensetzt. Die so construirte Gruppe kann man mit der Permutationsgruppe wie folgt isomorph machen: S entspricht derselben Permutation unter 1, 2, 3, 4 und J_i entspricht (2) (3) (4) (15); (1) (3) (4) (25); (1) (2) (4) (35); (1) (2) (3) (45) bezw., $J_1 S$ der Substitution, welche entsteht, indem in den Cyclen mit i nach i die Ziffer 5 gesetzt und auf diese Art ein Cyclus der Substitution S erweitert wird. Z. B. $(a_1 a_2)(a_2 a_3)(a_3 a_4)$, a_4 in a_1 ist $J_4 \cdot (a_1 a_2 a_3 a_4)$; $(a_1 a_2)(a_2 a_4)(a_3 a_3)$, a_4 in a_1 ist $J_4 \cdot (a_1 a_2 a_4)(a_3)$ und die Zusammensetzung der zwei: $(a_2 a_3)(a_1 a_4)(a_4 a_1)$, a_3 in a_2 ist $J_3 \cdot (a_1 a_4)(a_2 a_3)$. Die Permutationen (1 2 3 4 5) und (1 2 4 5) (3) geben (14) (2 3 5), was das Symbol der Substitution ist, welche gemäss unserer Regel der $J_3 \cdot (a_4 a_4)(a_2 a_3)$ entspricht.

2. Beweis. Die quadratischen Characteristiken besitzen keine anderen Fundamentalcurven als die Geraden des Viereckes $a_1 a_2 a_3 a_4$. Man kann also sagen, dass M_4 die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 und die Seiten $a_i a_k$ des Viereckes unter einander transformiren muss. Und die Bedingung existirt, dass die Incidenzen unter diesen 10 erhalten bleiben. Man denke sich nun ein Vierseit, welches in das Viereck $a_1 a_2 a_3 a_4$ eingeschrieben sei. Man wird die Configuration $(3, 3)_{10}$ von Désargnes erhalten und wenn man jede Gerade des Vierseites durch die Punkte bezeichnet, welche sie enthält, wird jede Characteristik eine Substitution unter den Punkten der $(3, 3)_{10}$ hervorrufen, welche die Configuration $(3, 3)_{10}$ ungeändert lässt. Aber $(3, 3)_{10}$ ist der Schnitt der Ebene mit den Geraden und den Ebenen eines vollständigen Fünfecks des Raumes und wie bekannt ist die Gruppe von $(3, 3)_{10}$ identisch mit der Gruppe M_5.

3. Beweis. Die Characteristiken der Gruppe vertauschen die Netze der Geraden der Ebene und der Kegelschnitte durch $a_2 a_3 a_4$, $a_1 a_3 a_4$, $a_1 a_2 a_4$, $a_1 a_2 a_3$ resp. und durch eine Substitution unter diesen 5 Netzen ist die Characteristik bestimmt. Denn durch den Vorgänger und den Nachfolger des ersten Netzes sind die zwei Fundamentalsysteme bekannt und durch die anderen Folgen die Verkettungen oder die Directrixsubstitution der Characteristik.

4. Beweis. Man fügt zu den vier Punkten $a_1 a_2 a_3 a_4$ einen Punkt d, den man als doppelt für alle Characteristiken supponirt und wendet nachher die Transposition $d^2 a_1 a_2 a_3 a_4$ an. Man wird eine Gruppe von

Vertauschungen unter den Punkten $d\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ erhalten. Die Gruppe H ist in die Gruppe unter $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ transformirt. Die Substitutionen J_i sind transponirt in a_i in d in a_i, a_j in a_j, a_k in a_k, a_l in a_l.

Theorem XLIV. Alle Untergruppen von M_4, welche dieselbe Ordnung $p \ldots p_\nu$ haben, wo $p_1, \ldots p_\nu$ relativ prim sind, sind äquivalent durch cubische Transposition.

Denn zwei solche Untergruppen sind äquivalent zwei Untergruppen der symmetrischen Gruppe in 5 Buchstaben und zwei Untergruppen dieser letzteren Gruppe, welche dieselbe Ordnung haben, sind äquivalent durch Vertauschung.

4. Die Gruppe M_5. Theorem XLV. Es existirt eine isomorphe Gruppe von Transformationen de Jonquières mit 7 Punkten.

Beweis. Durch die Uebertragung mit $d^2\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4$. Die Gruppe M_4 für $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ wird in die Gruppe von Vertauschungen unter $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ und die Characteristiken $a_5\,a_5$, $a_i\,a_i$, $a_k\,a_k$ in $d^2\,d^2$, $a_5\,a_5$, .; die Characteristiken $(a_5\,a_i)\,(a_i\,a_5), \ldots$ in $d^2\,d^2$, $a_5\,a_i$, $a_i\,a_5, \ldots$ die Characteristiken $(a_5\,a_i)$, $(a_i\,a_5)$, $\ldots$ in $d^2\,d^2$, $a_5\,a_i$, $a_i\,a_5$, $\ldots$, kurz die neue Gruppe hat dieselben Directrixsubstitutionen als die ursprüngliche Gruppe.

Die Gruppe enthält die 120 Vertauschungen, dann die $120 \cdot 10$ quadratischen Substitutionen und die $120 \cdot 5$ cubischen Substitutionen, zusammen 1920 Characteristiken.

Theorem XLVI. Die Gruppe ist holoedrisch isomorph einer Untergruppe der Gruppe, welche die Configuration 16_6 von Kummèr ungeändert lässt.

Beweis. Die Fundamental-Punkte und Linien sind durch die 5 Punkte $a_1 \ldots a_5$, durch $(a_1 \ldots a_5)^2$ und die 6 Geraden $a\,a_k$ gebildet und die Characteristiken von M_5 müssen alle diese Curven unter einander permutiren. Man kann sie in die folgenden Sextupel gruppiren: $a_1, \ldots a_5$ und $(a_1 \ldots a_5)^2$; $a_j a_i\ j\ (=)\ i$; a_1, a_2, $a_1\,a_2$, $a_3\,a_4$, $a_4\,a_5$, $a_5\,a_3$ und die analogen, was die 16 Sextupel unter den 16 Elementen gemäss den 16_6 gibt. Die Characteristiken von M_5 transponiren die 16 Sextupel unter einander.

Theorem XLVII. Die Gruppe M_5 ist auch isomorph der Gruppe der Substitutionen, welche die Geraden einer F_4 mit Doppelkegelschnitt ungeändert lässt oder der Gruppe, welche die 16 Geraden einer F_3 unter einander vertauscht, welche eine der 27 Geraden nicht treffen.

Denn F_{12} nimmt den Werth 1 für alle Complexe $p = 0$, $u = 0$ in Bezug auf den Complex 3, 1, 1, 1, 1, 1 an und wird für zwei Complexe $p = 0$, $u = 0$ entweder 0 oder 1.

Corollar. Wenn man von den 27 Geraden der cubischen Fläche eine Gerade mit allen jenen absondert, welche sie schneiden und man bildet unter den anderen 16 Geraden die Sextupel durch eine Gerade mit den 5 sie treffenden erhält man 16 Sextupel, welche mit Bezug auf die 16 Geraden dieselbe Vertheilung haben wie die 16 ebenen Sextupel der 16_6 mit Bezug auf die 16 Doppelpunkte.

§ 5. Die Subtotalgruppen M_σ und einige Untergruppen.

Theorem XLVIII. Die Subtotalgruppen liefern durch die linearen Substitutionen 1), welche sie ausdrücken, unzerlegbare[1]) Gruppen im linearen Raume $3n - y_1 - \ldots - y_\sigma = 0$.

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass kein i tupel von $R_{\sigma-1}$ existirt, das durch die Substitutionen in sich transformirt werde, $i \leq \sigma$. Indem man mit M_3 beginnt, ist es leicht zu beweisen für die Substitutionen

$$\begin{array}{lll} n' = 2n - y_1 - y_2 - y_3 & n' = 2n - y_1 - y_2 - y_3 & n' = 2n - y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1' = n \quad - y_2 - y_3 & y_2' = n \quad - y_2 - y_3 & y_2' = n \quad - y_2 - y_3 \\ y_2' = n - y_1 \quad - y_3 & y_1' = n - y_1 \quad - y_3 & y_3' = n - y_1 \quad - y_3 \\ y_3' = n - y_1 - y_2 & y_3' = n - y_1 - y_2 & y_1' = n - y_1 - y_2 \end{array}$$

dass damit ein R_2 in dieselben zwei anderen transformirt werde, indem seine Gleichung

$$\alpha n + \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i y_i \text{ in } (2\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) n + (-\alpha - \alpha_2 - \alpha_3) y_1 + \ldots,$$

verwandelt wird, sein müsste $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (und damit $(2\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3) n = \alpha n$, sogar $\alpha + 3\alpha_1 = 0$). Die Ebene $\alpha n + \alpha_1 \Sigma y_i$ wird also involutorisch verwandelt in $(2\alpha + 3\alpha_1) n - (\alpha + 2\alpha_1) \Sigma y_i$. Aber M_4 enthält $4 M_3$, und man hat also 4 solche R_3, welche nur dieselben sein können, wenn $\alpha_1 = -\alpha - 2\alpha_1$ oder $\alpha = -3\alpha_1$. Man erhält also 4 verschiedene R_3, welche jedoch nicht unter einander transformirt werden durch die Substitutionen noch durch ihre Zusammensetzungen.

Theorem XLIX. Die Anzahlen der Characteristiken von M_6, M_7, M_8 sind $6!\ 72 = 9! \cdot 7 = 51840$; $7! \cdot 72 \cdot 8 = 9! \cdot 8 = 2903040$; $8!\ 9!\ 8 = 40320 \cdot 2903040$.

---

1) Unzerlegbar nennt Herr Jordan eine Gruppe von linearen Substitutionen im R_r, welche nicht gestattet, dass durch lineare Transposition ihre Variabeln in nicht übergreifende Abtheilungen zerfällt werden. Man kennt bisher im R_3 sehr wenige unzerlegbare Gruppen von Collineationen. Herr Jordan ist in seiner Preisschrift nicht bis zu einer vollständigen Aufzählung durchgedrungen.

Beweis. Für $\sigma = 6$. Die quadratischen Characteristiken (aa'), (bb'), (cc') sind $\binom{6}{3}$, die cubischen (ab), $(a_i b_i)$ sind $6 \cdot 5$, die biquadratischen sind $\binom{6}{3}$, eine einzige Q_5 und jede ist zusammenzusetzen mit den 6! Vertauschungen (Collineationen), also $72 \cdot 6!$ Ebenso für $\sigma = 7, 8$.

Theorem L. Die durch die Characteristiken von M_σ gebildeten Untergruppen, welche mit einer typischen Characteristik T oder mit einer Vertauschung der Punkte vertauschbar sind, sind typisch.

Sie sind nicht unter einander äquivalent, weil die T nicht äquivalent sind und sie sind immer äquivalent mit Gruppen derselben Definition.

Theorem LI. Die Untergruppen, welche eine Characteristik T in irgend eine Potenz T^k vom selben Index transformiren, sind typisch.

Die Gruppen von L, welche zu T und T^k gehören, sind identisch. Wenn es also mehrere verschiedene T gibt, welche zum selben T^k führen, werden mehrere mit einer selben Gruppe vertauschbare Characteristiken, also schliesslich zwei vertauschbare Untergruppen vorhanden sein [1]).

Theorem LII. Die Untergruppen, welche durch Zusammensetzung von zwei Untergruppen entstehen, von welchen eine $\sigma - \lambda$ Punkte in Characteristik, die anderen in Vertauschung, die zweite jene $\sigma - \lambda$ Punkte in Vertauschung und die λ Punkte in Characteristik hat, sind nicht typisch.

Denn λ kann nicht grösser als 5 sein und man kann also einen als invariant vorausgesetzten Punkt d der einen Gruppe hinzufügen und durch cubische Transposition wird man auf eine Gruppe von Vertauschungen oder eine Gruppe von Transformationen de Jonquières's reduciren.

Theorem LIII. Die Gruppe M_σ kann zusammengesetzt werden durch zwei Vertauschungen und durch eine quadratische Characteristik (aa'), (bb'), (cc') zusammen mit $\sigma - 3$ variabeln Punkten.

Beweis. Die Untergruppe H_σ der Vertauschungen hat eine Basis von zwei Substitutionen. Jede involutorische Characteristik kann auf ihren Typus durch Transpositionen zurückgeführt werden der Form (aa'), (bb'), (cc'), wozu es genügt, die Fundamentalpunkte derart zu ver-

---

1) Allgemeiner als LI ist: Die Untergruppen gebildet von den S, welche die Eigenschaft haben, $S^k TS = T_1$ zu machen, wo $T, T_1, \dots . T_\nu$ die Glieder einer typischen Untergruppe sind und wo k constant ist, sind selbst typisch.

legen. Die typischen Characteristiken Θ_2, Σ_2 können durch involutorische Q^2 zusammengesetzt werden. Endlich ist jede geschlossene Characteristik zusammensetzbar durch eine involutorische Characteristik und eine Vertauschung (Collineation).

Theorem LIV. Die durch eine transitive Untergruppe von H_σ und eine quadratische involutorische Characteristik entstehende Untergruppe von M_σ ist typisch und unabhängig von der Lage der drei Fundamentalpunkte.

Wenn man für alle Characteristiken einer Untergruppe von M_σ die adjungirten Collineationen bildet, werden diese eine neue Gruppe K bilden, welche mit den involutorischen Characteristiken der Untergruppe eine neue Gruppe liefert, welche die gegebene Gruppe enthält. Im Allgemeinen ist die so erhaltene Gruppe grösser und enthält alle Characteristiken, weil sie alle involutorischen Characteristiken und ihre adjungirten Collineationen enthält. Man wird die Untergruppen unterscheiden können, je nachdem die adjungirten Collineationen die Totalgruppe oder eine ihrer Untergruppen geben.

Theorem LV. Die Gruppe von Characteristiken, welche durch Zusammensetzung einer involutorischen Characterissik mit einer (intransitiven) Gruppe von Vertauschungen (Homographien) entsteht, welche die gleich vielfachen Aggregate[1]) in sich transformirt, ist eine endliche Gruppe auch für $\sigma > 8$.

Die einzigen Untergruppen dieser Art, welche nicht auf Gruppen von Vertauschungen oder auf Gruppen von Jonquières reducirbar sind, sind die aus $(222222)^5$, $(3333333)^6$, $(66666666)^{17}$ entstehenden Gruppen.

Theorem LVI. Lässt man für alle Fundamentalsysteme, welche eine gleiche Vertheilung der Zahlen α_i besitzen, die α_i tupel zusammenfallen, so erhält man eine typische Untergruppe.

Die zulässigen Vertheilungen sind 1, 7; 2, 6; 3, 5; 1, 2, 5; 1, 3, 4; 1, 1, 6; 1, 1, 2, 4; 2, 3, 3; 1, 2, 2, 3.

Theorem LVII. Die Characteristiken von M_σ, in welchen bestimmte λ der Punkte conjugirte Paare Fundamentalpunkte mit ihren Verkettungen tragen, bilden eine Untergruppe.

Beweis. Durch die Zusammensetzung kann es nie geschehen, dass der mit einem der λ Punkte conjugirte Fundamentalpunkt in die übrigen $\sigma - \lambda$ Punkte springe. Wenn in einer Characteristik zwei conjugirte Punkte verkettet sind, so sind die eingeschalteten Punkte unter einander conjugirt in den Wiederholungscharacteristiken[2]).

---

1) Cf. Clebsch, Math. Ann. IV.

2) Diese Untergruppen sind unmittelbar anwendbar auf die quadratischen

Diese Untergruppen von M_σ sind nicht äquimultipel. Ihre Directrixsubstitutionen sind intransitiv und es gibt wenigstens zwei Systeme der Intransitivität.

§ 6. **Die orthanallagmatischen Gruppen von Characteristiken.**

1. Theorem LVIII. Wenn mehrere Jonquières'sche Characteristiken einen gemeinsamen Punkt (ab) besitzen und durch die Transformation der Characteristikpunkte eine endliche Anzahl neuer Punkte hervorbringen, so liefern sie durch Zusammensetzung eine endliche Gruppe.

Beweis. Jede durch Zusammensetzung entstandene Characteristik kann nur solche liefern, wo die Verkettungen die Fundamentalpunkte der gegebenen Characteristiken oder deren Transformirte sind.

Theorem LIX. Für jede Gesammtzahl N von Punkten existirt eine endliche Gruppe von Characteristiken mit (ab), deren Fundamentalpunkte unter diesen Punkten sind.

Man erhält sie durch Vertheilung der Fundamentalsysteme mit $2, 4, 6, 8 \ldots 2(n-1) \leqq N$ Punkten in allen möglichen Arten auf diese Punkte und durch Erweiterung derselben auf alle mögliche Arten zu Characteristiken unter diesen N Punkten.

Theorem LX. Alle Characteristiken $(ab)(a_i b_i)$ $(i = 1 \ldots 2\mu)$, wo μ alle Werthe $1, 2, \ldots 2(n-1) \leqq N$ durchlaufen kann, bilden eine Gruppe von involutorischen Characteristiken über den N gegebenen Punkten.

Denn (ab), $(a_1 b_1)$, $\ldots$ $(a_{2\mu} b_{2\mu})$ und (ab), $(a'_1 b'_1)$, $\ldots (a'_{2\nu} b'_{2\nu})$, wo a_α $(\alpha = 2\mu - \lambda, \ldots \mu$ respective coincidiren mit $a'_1 \ldots a'_\lambda)$ geben die Characteristik (ab), $(a_1 b_1)$, $\ldots$ $(a_{2\mu-\lambda} b_{2\mu-\lambda})$.

Theorem LXI. Jede Characteristik kann zusammengesetzt gedacht werden aus einer involutorischen Characteristik mit identischer Directrixsubstitution und aus einer homographischen Substitution (Buchstabenvertauschung). Wenn man zwei beliebige $J_{2n} H$ und $J_{2n} H'$ zusammensetzt, erhält man eine Characteristik, für welche H'' gleich ist $H \cdot H'$.

Die Directrixsubstitution ist abgeleitet aus der Characteristik, indem man die Unterscheidung unter den Verkettungen a_i in ab_i und b_i in b'_i weglässt, d. h. die zweiten behält und für die ersten a_i in ab_i ersetzt.

Transformationen in R_ν, indem man für die λ Punkte die Punkte S', S und für die $\sigma - \lambda$ Punkte die G, H, G', H' (und ihre Analoga in den höheren Transformationen) nimmt. Cf. Rendiconti Ist. Lombardo 31. Mai 1894.

Theorem LXII. Wenn $S_1, S_2, \ldots S_g$ eine Gruppe mit (ab) bilden, so bilden die Directrixcollineationen $H_1 \ldots H_g$ ebenfalls eine endliche Gruppe.

Denn das Product $H_1 H_2$ ist die Directrixcollineation von $S_1 S_2$.

Theorem LXIII. Die Wiederholungen einer Characteristik können nur Collineationen enthalten, welche die 2λ. Wiederholungen der Directrixcollineation für die gegebene Characteristik sind und diese nur, wenn ihr Index ungerade ist.

Die Wiederholung T^i kann nur für gerades i collinear werden und ist dann ihre eigne Directrixcollineation.

Theorem LXIV. Die Totalgruppe von Characteristiken, welche eine gegebene Gruppe von Directrixcollineationen liefern, erhält man auf folgende Art: Man disponirt über jede Collineation alle quadratischen, cubischen, biquadratischen, . . . Fundamentalsysteme und setzt sie mit der Collineation zu einer Characteristik zusammen.

Beweis. Zwei beliebige dieser Characteristiken werden eine Characteristik liefern, deren Directrixsubstitution in der Gruppe der H enthalten ist und die involutorische Characteristik muss auch aus der nach der gegebenen Regel gemachten Vertheilung erfolgen.

Theorem LXV. Die Anzahl der Characteristiken der Totalgruppe, die zu einer gegebenen Directrixcollineation (und ihrer cyclischen Gruppe) gehört, ist 2^{N-1}, wo N die Ordnung von H.

Denn für jede Substitution H ist die Anzahl der quadratischen Characteristiken $\binom{N}{2}$, der cubischen $\binom{N}{4}$, . . . und $\Sigma\binom{N}{2n} = 2^{N-1}$.

Theorem LXVI. Für gerades N enthält die zur Gruppe H gehörige Totalgruppe eine Untergruppe gesättigter Characteristiken, d. h. solcher, wo entweder nur Coincidenzen oder nur Verkettungen vorhanden sind. Ihre Anzahl ist $2N$.

Denn ein Fundamentalsystem über allen N Punkten gibt mit der Collineation H eine Characterisik, deren sämmtliche Wiederholungen ebenfalls gesättigt sind und die Zusammensetzung zweier verschiedener gesättigter Characteristiken gibt eine Collineation. Die Untergruppen dieser Gruppe sind nur die Totalgruppe und eine Gruppe, welche nur Characteristiken JH_i enthält, wo H_i nicht der Gruppe der zweiten Wiederholungen H_i angehört.

Theorem LXVII. Wenn man eine gesättigte Characteristik JH_i durch eine der Collineation L überträgt, erhält man eine gesättigte Characteristik, welche die Transposition LHL^{-1} zur Directrixcollineation hat.

Wenn man eine Collineation L durch eine gesättigte Characteristik überträgt, erhält man eine gesättigte Characteristik $S^{-1}LS$.

Wenn man eine gesättigte Characteristik durch eine andere gesättigte Characteristik überträgt, erhält man eine gesättigte Characteristik, welche eine Directrixsubstitution $H^{-1}H'H$ besitzt.

2. Definition. Ich setze jetzt N Elemente voraus, bezeichne jedes mit einem Index, welchen die zwei Werte 0, 1 annehmen kann, sodass ich denselben N andere Elemente zuordne, was insgesammt $a_1^0 \dots a_N^0$ und $a_N^1 \dots a_N^1$ gibt. Ich bilde ferner Substitutionen, welche die N Elemente $a_1 \dots a_N$ unter einander vertauschen mit der Freiheit, eine Anzahl Folgen darunter zu mischen, welche a_i^0 in $a_{i'}^1$, statt $a_{i'}^0$ vertauschen. Ich werde sagen, dass die Folgen $a_i^0 a_{i'}^0$ von der ersten Art seien und die Folgen $a_i^0 a_{i'}^1$ von der zweiten Art. Eine Substitution, welche a_i^0 in a_k^0 oder a_k^1 verwandelt, verwandelt auch a_i^1 in a_k' oder a_k^0. Die zu untersuchenden Gruppen sind also imprimitive mit N Systemen der Imprimitivität der Ordnung 2.

Man kann sich denken, dass zwischen zwei Elementen einer Folge 2. Art sich ein Punkt befinde $a^0 \cdot a^1$, während für jene 1. Art der Raum leer ist. Einer jeden Permutation unter $a_1^0 \dots a_N^0$ gehören 2^N Substitutionen 2. Art an, eine von ihnen ist die gewöhnliche Substitution. Die Substitution welche a_i^0 in a_i^1 in a_i^0 $(i = 1 \dots N)$ verwandelt, heisse ausgezeichnet [1]).

Man erkennt leicht die Wahrheit der folgenden Theoreme:

Theorem LXVIII. Wenn man zwei Substitutionen 2. Art zusammensetzt, ist die Directrixsubstitution der Resultirenden gleich dem Producte der Directrixsubstitutionen der Componenten.

Die Directrixsubstitutionen aller Substitutionen 2. Art einer Gruppe bilden wieder eine Gruppe. Die ausgezeichnete Substitution ist vertauschbar mit jeder Substitution 2. Art.

Theorem LXIX. Wenn von zwei Substitutionen 2. Art jede eine gerade Anzahl von Folgen 2. Art besitzt, besitzt die Zusammensetzung ebenfalls eine gerade Anzahl von Folgen 2. Art.

Beweis. Sei $1 \cdot 2$ eine Folge von S_1. Wenn S_2 2 3 enthält, wird die Zusammensetzung $2 \cdot 3$ enthalten; enthalten S_1, S_2 bezüglich 12 und $2 \cdot 3$ so enthält $S_1 S_2$ $1 \cdot 3$. Die Anzahl der Punktirungen in $S_1 S_2$ wäre die Summe jener in S_1, S_2 mit Ausnahme der Fälle, wo diese

1) Man sieht übrigens, wie diese Theorie, durch welche die Gruppen Jonquièresscher Transformationen mit coincidenten (ab) erledigt werden sollen, einen weiteren Ausbau der Characteristikentheorie für die Theta implicirt. Die weiter unten zu erwähnende Gruppe der t_i ist geradezu, sogar bis auf die zweireihige Schreibung, identisch mit der Gruppe der sämmtlichen Characteristiken.

letzteren aneinanderstossen. In diesem Falle verschwinden zwei aus der Summe, eine von S_1 und eine von S_2, sodass die der Summe zu entfernenden Folgen in der Zahl 2λ vorhanden sind gn. e. d. So folgt nun auch:

Theorem LXX. In jeder Gruppe von Substitutionen zweiter Art bilden diejenigen, welche eine gerade Anzahl von Folgen 2. Art enthalten, eine Untergruppe.

Die Gruppe aller Substitutionen 2. Art für eine gegebene Gruppe H von Directrixsubstitutionen heisse die Totalgruppe für H, und die Gruppe aller mit gerader Anzahl von Folgen 2. Art heisse die Subtotalgruppe für H.

3. Theorem LXXI. Die Substitutionen $t_1 = (\dot{1})(2)\ldots(N)$, $t_2 = (1)(\dot{2})\ldots(N)$, $\ldots t_N = (1)(2)\ldots(N)$ bilden eine Gruppe, welche mit der Gruppe H die Totalgruppe für H constituirt[1]).

Beweis. Durch die t_i kann jede Substitution mit einer beliebigen Zahl von Folgen $(\dot{\alpha})$ zusammengesetzt werden und jede Substitution der Totalgruppe ist durch eine solche Substitution und eine Substitution 1. Art zusammensetzbar.

Theorem LXXII. Wenn h eine Substitution 1. Art (ohne Punktirung) ist, so besteht die Relation $h t_i = t_{i-1} h$, und wenn h die Folge $k_1 k_2$ enthält, ist $h t_{k_2} = t_{k_1} h$, also $(h t_i)^u = h^u t_i t_{i+1} \ldots t_{i+u}$.

Beweis. ht_i verwandelt a^0_{i-1} in a^1_i, t_{i-1} verwandelt a^0_{i-1} in a^1_{i-1} und $h\, a^1_{i-1}$ in a^1_i, also $t_{i-1} h$ verwandelt a^0_{i-1} in a^1_i wie $h t_i$, ebenso für $k_1 k_2$.

Corollar I. Eine Substitution $t_i t_k \ldots t_z$ wird durch irgend eine Substitution zweiter Art $h t_\iota t_\varkappa \ldots t_\omega$ übertragen in $t_{i+1} t_{k+1} \ldots t_{z+1}$.

Corollar II. Je nachdem eine Substitution der Subtotalgruppe angehört oder nicht, ist ihre N. Potenz von der 1. Art oder $t_1 \cdot t_2 \ldots t_N$.

Theorem LXXIII. Wenn N Primzahl, gibt es in der Gruppe $[t_1, \ldots t_N]$ keine andere mit der cyclischen Gruppe $[h_1, h_1^2 \ldots h_1^N]$ vertauschbare Gruppe als die Subtotalgruppe.

Die Gruppe der h macht wegen der Transitivität aus t_i alle anderen und ebenso aus $t_i t_k t_l$ u. s. w.

Corollar. Ist N Primzahl, so bilden die Substitutionen $t_{i_1} \ldots t_{i_\lambda}$; $t_{i_1+1}, \ldots t_{i_\lambda+1}$; $\ldots$; $t_{i_1+N-1} \ldots t_{i_\lambda+N-1}$ eine Basis der Totalgruppe, wenn λ ungerade und eine Basis der Subtotalgruppe, wenn λ gerade.

---

1) Die von den t constituirte Gruppe ist eine Gruppe vertauschbarer Substitutionen, wie sie von Frobenius und Stickelberger Cr. J. Bd. 86 behandelt worden sind. $t_1, \ldots t_N$ bilden eine »reducirte Basis« (ib. § 8) und $2, 2, \ldots 2$ sind ein vollständiges System von Invarianten.

Theorem LXXIV. Die Totalgruppe, welche zu einer cyclischen Directrixgruppe von Primzahlordnung gehört, enthält keine andere Untergruppe, als die Subtotalgruppe und die Gruppen, welche aus Potenzen einer Substitution entstehen.

Die Function

$$(x_1 + \omega x_2 + \cdots + \omega^{N-1} x_N) + \alpha (x_{N+1} + \omega x_{N+2} + \cdots + \omega^{N-1} x_{2N})^6$$

geht durch keine andere Substitution in sich über als durch die Potenzen einer und derselben Substitution. Soll eine Substitution x_1 mit x_{N+2} vertauschen, so muss zunächst $b = a$ sein und $A = \pm 1$, dann ist aber sofort die Substitution $t_1 \cdot t_2 \ldots \cdot t_N$ vorhanden. Soll eine weitere Substitution vorhanden sein, so folgt $\omega = 1$.

Mittelst dieser Ueberlegung beweist man nun auch:

Theorem LXXV. Wenn die Gruppe der Directrixsubstitutionen, welche zur Gruppe von Substitutionen 2. Art gehört, transitiv ist, erhält man die Totalgruppe, wenn eine Untergruppe, deren Gruppe H cyclisch ist, die Totalgruppe ist und die Subtotalgruppe wenn eine solche Untergruppe die Subtotalgruppe ist.

Wenn überhaupt zwei verschiedene Substitutionen 2. Art T_1, T_2 mit derselben Directrixsubstitution vorhanden sind, $T_1 = h t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_\lambda}$, $T_2 = h t_{k_1} t_{k_2} \ldots t_{k_\lambda}$, so erhält man durch Zusammensetzung $T_1 T_2^{-1} = t_{i_1+1} \cdot t_{i_2+1} \ldots t_{i_\lambda+1} \cdot t_{k_1} \cdot t_{2k} \ldots t_{k_\lambda} = t_1^{s_1} t_2^{s_2} \ldots t_N^{s_N}$, wo die s_i Null oder Eins sind und wenn diese Substitution derart ist, dass sie durch $h T_1 T_2^{-1} h^{-1}$ in eine Anzahl N wesentlich verschiedener Substitutionen übergeht, so bleibt nachzuweisen, dass sie stets eine reducirte Basis der Gruppe der t_i bildet. Hiezu ist nach Frobenius und Stickelberger (Cr. J. Bd. 86) nur nothwendig, dass die Determinante der s gleich Eins sei, was für gerade Anzahl t' sehr leicht zu beweisen ist, da der Fall Null ausgeschlossen ist. Aber auch, dass man eine Substitution wie die oben für $T_1 T_2^{-1}$ geforderte stets finden kann, wenn N Primzahl, beweist man ohne Schwierigkeit. Es folgt nun so der Satz:

Theorem LXXVI. Die zu einer transitiven Directrixgruppe H gehörige Totalgruppe kann keine anderen Untergruppen haben, als 1. die Subtotalgruppe, 2. die Gruppe H, 3. die Gruppen, welche aus Potenzen einer einzigen Substitution bestehen. 4. die Total- und Subtotalgruppen, welche zu den intransitiven Untergruppen von H gehören. 5. solche Gruppen, wo zu jeder Directrixsubstitution nur eine einzige Substitution 2. Art gehört oder wenn N nicht Primzahl, aus mehreren solchen zusammengesetzt sind und hievon speciell 6. solche, welche auch überdies Untergruppen der Subtotalgruppe sind.

4. Will man aber für eine gegebene Gruppe H eine Gruppe von

Substitutionen zweiter Art construiren, welche dieselbe Ordnung r besitzt, so müssen eine gewisse Anzahl k Elemente vorn und rückwärts überall wo sie vorkommen, mit Punktirungen versehen werden und wenn zwei solche Elemente in einer Substitution von H successiv sind, so werden die beiden Punkte zwischen ihnen weggelassen. Auf diese Art entspricht man widerspruchsfrei den Bedingungen der Gruppenbildung und erhält überdies Gruppen, welche 1. der Subtotalgruppe angehören und 2. die Eigenschaft haben, dass keine Substitution mehr als $2k$ Punktirungen besitzt. Wenn N nicht prim ist, so kann man auch mehrere solche Gruppen combiniren, ohne die Totalgruppe zu erhalten.

Bevor ich weiter gehe, schalte ich noch folgenden Satz ein:

Theorem LXXVII. Wenn eine Substitution, welche aus einem Cyclus besteht, eine gerade Anzahl Punktirungen hat und ihre Ordnung eine zusammengesetzte Zahl ist, so hat jede ihrer Wiederholungen in jedem Partialcyclus wieder eine gerade Anzahl Punktirungen.

5. Um die Gruppe von Characteristiken mit (ab) zu erhalten, muss man die N Punkte mit $a_1^0, \ldots a_N^0$, die N Geraden aa_i, ab_i, ab_i' mit $a_1', \ldots a_N'$ bezeichnen, derart, dass zwei Elemente mit demselben unteren Indexe incident sind. Die Gruppe aller möglichen Characteristiken von Jonquières über diesen Punkten ist die Subtotalgruppe der Substitutionen 2. Art, welche zur symmetrischen Gruppe von N Elementen als Directrixgruppe gehört. Dagegen hat die Totalgruppe wenigstens in der Ebene keine geometrische Bedeutung. Im R_3 und R_r kann man ihr wohl eine Interpretation verschaffen mittelst jener Transformationen, welche aus quadratischen zusammensetzbar sind[1]).

Um die Untergruppen von Characteristiken zu haben, hat man also die Untergruppen der Subtotalgruppe zu suchen. Daher:

Theorem LXXVIII. Die einzigen transitiven Gruppen, welche man mit Characteristiken de Jonquières's mit (ab) bilden kann, sind: 1. die Gruppen involutorischer Characteristiken, in denen nur invariable gewöhnliche Punkte adjungirt sind, 2. die cyclischen Gruppen, 3. die Gruppen aller Characteristiken, welche eine gegebene Directrixgruppe haben, 4. die Gruppen, wo jeder Directrixsubstitution nur eine einzige Characteristik entspricht, oder die aus mehreren solchen Gruppen zusammengesetzten Gruppen.

---

1) Es ist merkwürdig, dass die Characteristikentheorie der Theta sich auf die Drittel und $r$tel Characteristiken erweitern lässt, wie dies durch die Arbeiten der Herren Krause und besonders Prym, Krazer geschehen ist, während diesem Umstande für den Augenblick nichts Geometrisches zu entsprechen scheint. Vielleicht bietet gegenwärtige Schrift Anlass zu der bezüglichen Entdeckung.

Unter den letzteren sind also auch die Gruppen enthalten, deren Characteristiken nicht mehr als $2k$ Fundamentalpunkte besitzen, also den Grad k nicht übersteigen.

6. Wenn die Gruppe H intransitiv ist, so vertheile man die Gruppen von LXXVIII auf die einzelnen Systeme der Intransitivität. Dann können alle Relationen, welche Isomorphie unter diesen elementaren transitiven Gruppen liefern, zur Bildung von Gruppen von Characteristiken dienen, sofern nur in jeder Combination mehrerer elementarer Substitutionen die Summe der Punktirungen stets eine gerade ist. Isomorphie muss für die H und ausserdem für die S bestehen. Ich schliesse mit einer Anwendung:

Theorem LXXIX. Die Gruppe M_2 von quadratischen Characteristiken mit zwei Hauptpunkten (aa'), (bb') entsteht, wenn man in einer Gruppe H von Vertauschungen der N Punkte vor und hinter das Element 1 die Punktirung setzt.

In diesem Falle ist es nicht nöthig, die intransitiven Gruppen gesondert zu betrachten. Denn da sich die zwei Punkte immer in der Nachbarschaft des Punktes 1 befinden, so hat man überhaupt nur diejenigen Elemente zu betrachten, welche von 1 aus erreichbar sind.

§ 7. Gruppen, welche zur orthanallagmatischen isomorph sind.

Lemma I. Die Gruppe der geometrischen Substitutionen von Cauchy enthält eine Untergruppe, wo jede lineare Form nur eine Variable enthält, $z_i' = az_i + \alpha$.

Lemma II. Diese letztere Gruppe enthält eine Untergruppe, wo alle Coefficienten $= 1$ sind.

Lemma III. Diese letztere Gruppe enthält eine Untergruppe, wo alle $\alpha = 0$ oder 1 sind.

Lemma IV. Diese letztere Gruppe enthält eine Untergruppe, wo die Anzahl der α, welche gleich 1 sind, stets gerade ist.

Theorem LXXX. Diese letztere Gruppe ist holoedrisch isomorph zur Totalgruppe der Characteristiken (ab) über N Punkten.

Die folgenden Theoreme sind eine einfache Consequenz von Theoremen des § 5:

Die Totalgruppe der Characteristiken (ab) über N Punkten bringt unter den Complexen $p = 0$, $u = 0$ mit $(ab)^{\nu-1}$ und 2ν einfachen unter den N Punkten eine Gruppe von Vertauschungen hervor, welche holoedrisch isomorph zur Gruppe von Characteristiken ist.

Eine ebensolche Gruppe von Vertauschungen entsteht unter den Complexen $p = 0$, $u = 1$ mit $(ab)^{\nu-1}$ und $2\nu - 1$ einfachen Punkten unter den N.

Aus einer anderen Theorie theile ich hier den Satz mit:

Theorem LXXXI. Die Punkte und Kreise von Clifford, welche man für ein gegebenes N-seit bilden kann, bilden mit den N Geraden eine homogene Configuration und die Gruppe von Vertauschungen, welche diese Configuration ungeändert lässt, ist holoedrisch isomorph zur Gruppe der sämmtlichen orthanallagmatischen Characteristiken über N gegebenen einfachen Punkten und einem festen Punkte (ab).

§ 8. Die Typen M_6, M_7, M_8 und ihre typischen Untergruppen.

1. Theorem LXXXII. Die Gruppe M_6 ist äquivalent einer Untergruppe von M_7, welche derartige Beziehung zu zwei Punkten a_i, a_k hat, dass alle Characteristiken der Untergruppe eine durch $a_i a_k$ »gedachte« Gerade in sich transformiren.

Beweis. Man setzt einen durch alle Characteristiken von M_6 unveränderlichen Punkt d voraus und überträgt mittelst 4 einfacher Punkte $a_1 a_2 a_3 a_4$ von M_6 und durch d^2. In der neuen Ebene wird die Gerade $a_5' a_6'$ das Bild von $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 d^2)^3$ sein und weil M_6 diesen Complex in sich transformirt, wird die transponirte Gruppe $a_i a_k$ reproduciren.

Theorem LXXXIII. Die Gruppe M ist holoedrisch isomorph zur Gruppe der Gleichung der 27 Graden der Fläche 3. Ordnung.

Beweis. M_6 ist isomorph der Gruppe der Vertauschungen unter den Complexen mit $p = 0$, $n = 0$. Da die Zusammensetzung der Gruppe nur von den gegenseitigen Werthen von F_{12} abhängt, welcher Umstand auch die einfache Transitivität von M_6 bedingt, ist es wünschenswerth, die 27 Complexe durch Gegenstände von homogenem Character zu ersetzen. Dies ist möglich, wenn man als Merkmal den Werth von F_{12} eines Complexes mit Bezug auf den Complex $3, 1, \ldots 1$ nimmt, welcher für alle 27 gleich 1 wird. Da sich alle Geraden der Ebene zu zweien in einem Punkte schneiden, nimmt man die Geraden des Raumes R_3 und construirt die 27 Geraden, welche das Gesetz der Distribution der 27 Werthe von F_{12} befolgen. Wenn man a posteriori von dem Umstande Gebrauch machen will, dass solche 27 Geraden stets in einer F_3 enthalten sind, so kann man damit sogar eine Deutung der Complexe mit willkürlichen p, u durch die Curven der F_3 erreichen.

Corollar I. Nach Herrn Jordan ist dies auch die Gruppe von Steiner für die Zweitheilung der hyperelliptischen Functionen [1] $p = 2$.

---

1) C. Jordan: »Traité des substitutions et des équations algébriques. n. 500.

Corollar II. Die σ-Systeme von Complexen $p = 0$, $u = 0$, d. h. die Fundamentalsysteme von Transformationen über den 6 Punkten $a_1, a \dots a_6$ entsprechen also genau den Sextupeln von Schläfli.

Theorem LXXXIV. Die Gruppe M_6 ist einfach.

Man kann zum Beweise die ausgezeichneten Untergruppen nach dem Verfahren von Herrn Dyck bilden, indem man für jeden Typus unter den Substitutionen alle äquivalenten bildet und sie combinirt. Aber in unserem Falle wird man bei Durchlaufung der möglichen Typen immer die ganze Gruppe M_6 erhalten [1]).

Corollar. Auch die Untersuchungen über die 27 Geraden, besonders von Sturm und Bertini, haben bewiesen, dass keine ausgezeichnete geometrische Zusammenstellung unter den 27 Geraden existirt.

Theorem LXXXV. Die Gruppe M_7 enthält die einzige ausgezeichnete Substitution Θ_2, welche das Netz $(a_1^3 \dots a_7^3)$ zum homaloidalen besitzt und involutiv ist.

Denn Θ_2 hat keine äquivalente Characteristik und existirt selbst nur einmal, was von keiner anderen Characteristik gilt.

Theorem LXXXVI. Die Gruppe M_7 ist imprimitiv. Die Systeme der Imprimitivität sind die Paare von Complexen $p = 0$, $u = 0$, welche sich zu $(1111111)^3$ ergänzen.

Theorem LXXXVII. Die Gruppe M_7' unter den 28 Systemen der Imprimitivität ist einfach.

Beweis. Man kann sich der Gruppe von Vertauschungen unter 7 Buchstaben bedienen. Sie enthält keine andere ausgezeichnete Gruppe als die alternirende Gruppe. Auch die Gruppe, welche sie unter den 28 Paaren hervorbringt, ist ausgezeichnet. Aber eine ausgezeichnete Gruppe in M_7' wird entweder eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe von Vertauschungen enthalten oder keine Vertauschung. Aber der letztere Fall ist unmöglich, da man durch die aus einer Characteristik durch H entstehenden Characteristiken M_7 zusammensetzen kann und der erste Fall, weil man für die einzelnen Typen beweist, dass die ausgezeichnete Untergruppe der Vertauschungen mit einer beliebigen Characteristik die ganze Gruppe M_7' liefert.

Theorem LXXXVIII. Die Gruppe M_8 enthält die einzige ausgezeichnete Substitution $\Sigma_2 (a_1^6 \dots a_8^6)^{17}$, welche involutorisch ist. Sie ist imprimitiv und die Systeme der Imprimitivität sind die 120 Paare von Complexen $p = 0$, $u = 0$, welche sich zu $(22222222)^6$ ergänzen. Die Gruppe M_8' unter den 120 Systemen der Imprimitivität ist einfach.

---

1) Auch Herr Jordan hat bewiesen, dass die Gruppe der 27 Geraden von F_3 einfach ist.

Den ersten Theil verificirt man durch Ausführung, für den zweiten Theil bedient man sich der Gruppe der Untersuchungen unter $a_1, \ldots a_8$.

Theorem LXXXIX. Die Gruppe M'_7 ist holoedrisch isomorph der Gruppe der Gleichung für die 28 Doppeltangenten einer ternären biquadratischen Form.

Beweis. Die Gruppe M'_7 ist isomorph den Vertauschungen unter den 28 Paaren von Complexen $p = 0$, $u = 0$, welche F_{12} erhalten. Aber indem man sich unter der Ebene und einer anderen Ebene eine zweideutige cubische Transformation denkt, überzeugt man sich von der vollständigen Correspondenz unter diesen Paaren und den 28 Doppeltangenten und unter den durch F_{12} entstehenden Relationen und den Relationen unter den Wurzeln der Galoisschen Gleichung für die 28 Doppeltangenten [1]).

Corollar. Die 273 σ-Systeme für M'_7 sind die Bilder der 273 unabhängigen Septupel von Aronhold und die Characteristiken mit 7 Punkten entsprechen den Vertauschungen eines Septupels in die anderen. Man sieht überdies:

Theorem XC. Die 28 Paare von Curven $p = 0$, $u = 0$ kann man den 28 ungeraden Characteristiken der Functionen ϑ mit $p = 3$ entsprechen machen, indem man die 7 Punkte den 7 ungeraden Characteristiken von Riemann entsprechen macht, die 21 Geraden den Combinationen dieser Characteristiken zu je zweien.

Corollar. Die Fundamentalsysteme mit 7 Punkten entsprechen also den Siebenersystemen von Riemann für $p = 3$ [2]) und man schliesst hieraus:

Theorem XCI. Die Gruppe M'_7 ist holoedrisch isomorph der Gruppe von Steiner [3]) für $p = 3$ oder der Gruppe der Zweitheilung der Abelschen Integrale $p = 3$.

Da man weiss, dass die Gruppe der Zweitheilung einfach ist, wird M'_7 dieselbe Eigenschaft haben.

Theorem XCII. Die Gruppe M'_8 ist holoedrisch isomorph der Gruppe der Gleichung, welche gewisse 120 dreifach berührende Kegelschnitte einer Curve 6. Ordnung $p = 4$ bestimmt, oder einer Untergruppe der Gruppe von Steiner für $p = 4$.

---

1) Ueber die Gleichung 28. Grades sehe man H. Weber, Math. Ann. XXIII, p. 489—503 sowie seine Preisschrift und übrigens schon die ältere Arbeit von O. Hesse, Cr. J. Bd. 49. p. 279—332. Die mit unserer F_{12} sich deckenden Symbole von Cayley Cr. J. Bd. 68. p. 176—179 sind aufgeklärt von De Paolis »Le trasformagioni piane doppie del 3° ordine« 1878.

2) Cf. Hermann Stahl: »Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Characteristiken«, Cr. J. Bd. 88 p. 276 und F. Prym: »Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Characteristikentheorie«. 1882.

3) C. Jordan, Traité des substitutions et équations algébriques.

Beweis. Man wendet eine zweideutige Transformation an, welche die Curven $C_6 a_1^2 \dots a_8^2$ den Geraden der zweiten Ebene entsprechen macht und ihre Jacobische Curve D_9 einer Curve Z_6 mit zwei unendlich nahen dreifachen Punkten[1]) und die Curven $p = 0$, $u = 0$ über $a_1 \dots a_8$ den 120 Kegelschnitten, welche die Zweige von Z_6 im dreifachen Punkte berühren und mit ihr anderwärts dreifache Berührung haben. Die Gruppe M_8' ist definirt durch die Invarianz der Form F_{12} und die gegenseitigen Abhängigkeiten der Kegelschnitte bestehen in der Lage der Berührungspunkte, die ihrerseits das Bild der Werthe ist, welche die Curven $p = 0$, $u = 0$ der F_{12} geben. Die Gruppe M_8' ist also auch isomorph der Gruppe der Zweitheilung der Abelschen Integrale der Curve Z_6, aber diesen Integralen gehört nicht die ganze Gruppe von Steiner mit $p = 4$ zu.

Corollar. Unter den 120 Kegelschnitten kann man unabhängige Octupel zusammenstellen (analog den Septupeln von Aronhold), welche den Fundamentalsystemen der birationalen Transformationen der Gruppe M_8' oder den σ-Systemen von Curven $p = 0$, $u = 0$ entsprechen.

Corollar. Die 120 Paare von Curven $p = 0$, $u = 0$ können den 120 ungeraden Characteristiken der ϑ für $p = 4$ coordinirt werden[2]). Ich entnehme Herrn Schottky:

Theorem XCIII. Die Function $p = 4$, deren Integrale die fragliche Gruppe liefern, hat die Besonderheit, dass eine und eine einzige ihrer geraden ϑ-Functionen mit dem Verschwinden der vier Argumente verschwindet.

Dieselbe Function hat die Eigenschaft, dass unter den 4 Functionen φ eine quadratische Relation existirt, deren Discriminante Null ist[3]). Herr Schottky beweist l. c., dass die Normalcurve die Curve $D_9 a_1^3 \dots a_8^3$ ist. Von da aus kann man geometrisch beweisen, dass die Curve im Raume der φ auf einem quadratischen Kegel gelegen ist, und zwar mittelst ein-zweideutiger Transformation.

Ueber die Untergruppen von M_6, M_7, M_8 ist zu bemerken, dass die Gruppe von F_3 eine Untergruppe enthält, welche holoedrisch isomorph ist mit der symmetrischen Gruppe von 6 Buchstaben und die Gruppe von C_4 eine, welche isomorph ist mit der symmetrischen Gruppe von 7 Buchstaben. Ebenso enthält M_8 eine symmetrische Gruppe

---

1) M. Nöther, Erlanger Berichte 1878: »Ueber die einzweideutigen Ebenentransformationen.«

2) Cf. Schottky, Cr. J. 103. p. 185: »Ueber specielle Abelsche Functionen 4. Ranges.«

3) Hiezu H. Weber, Math. Ann. XIII p. 35–48: »Ueber einige bei den Thetafunctionen auftretende Ausnahmefälle.«

unter 8 Elementen. Die Gruppe der besonderen Function mit $p = 4$ enthält als Untergruppe die Gruppe der Curve $C_4 p = 3$.

Theorem XCIV. Indem man die Gruppe M_σ mit allen Characteristiken combinirt, welche auf $a_{\sigma+1}$ eine Coincidenz zweier conjugirter Fundamentalpunkte haben, erhält man eine Hauptuntergruppe von $M_{\sigma+1}$.

Beweis. Die Zusammensetzung von zwei Characteristiken, welche in $a_{\sigma+1}$ zwei conjugirte Fundamentalpunkte besitzt, führt zu einer anderen derselben Eigenschaft. Jede weitere Characteristik ist zusammensetzbar durch eine Characteristik der Untergruppe und eine Collineation, von welcher $a_{\sigma+1}$ nicht Doppelpunkt ist. Die Zusammensetzung mit der Untergruppe wird dasselbe Resultat haben, wie die Zusammensetzung der Untergrnppe mit dieser Collineation. Aber da M_σ die Gruppe der Vertauschungen unter den σ Punkten enthält und die Zusammensetzung dieser Gruppe mit den anderen Vertauschungen die Totalgruppe der Vertauschungen über $\sigma + 1$ Punkten liefert, wird man diese Gruppe mit M_σ zusammengesetzt haben und es ist ersichtlich, dass man so die ganze Gruppe $M_{\sigma+1}$ erhält. Ebenso beweist sich

Theorem XCV. Indem M_σ mit den Characteristiken combinirt wird, welche $a_{\sigma+1}$, $a_{\sigma+2}$ als zwei Paare conjugirter Fundamentalpunkte besitzen, erhält man eine Hauptuntergruppe von $M_{\sigma+2}$.

5. Herr Jordan hat einen sehr ausgedehnten Beweis gegeben, dass die Gruppe von F_3 zu keiner Gruppe von Permutationen unter weniger als 27 Buchstaben isomorph ist. Ich glaube, dass man es für unsere Gruppe M_6 auf etwas einfachere Art beweisen kann. Diese Gruppe besitzt keine anderen Invarianten als die Singularitätencomplexe p, u oder eigentlicher ihre Gesammtheit $z^\sigma_{p,u}$. Nun sahen wir § 3, dass die kleinste Zahl $z^\sigma_{p,u}$ immer $z^\sigma_{0,0}$ ist und diese Zahl ist 27 für M_6. Ebenso weiss man, dass, wenn M_7, M_8 sollen in N Buchstaben geschrieben werden können, es N Complexe p, u geben müsse, oder ein $z^\sigma_{p,u} = N$. Die geringste Zahl $z^\sigma_{p,u}$ ist für 7, $z_{00} = 56$ und für 8, $z_{00} = 240$. Also:

Theorem XCVI. M_7 oder M_8 besitzt keine isomorphe Gruppe von Vertauschungen unter weniger als 56 oder 240 Buchstaben.

Die linearen Substitutionen, welche ich in § 5 erwähnt habe, erlauben auszusprechen: Für M_6, M_7, M_8 existiren isomorphe Gruppen von Collineationen unter 7, 8, 9 Variabeln. Es bleibt zu entscheiden, ob es zu M_6, M_7, M_8 isomorphe Gruppen von Collineationen in weniger als 7, 8, 9 Variabeln gibt.

6. Theorem XCVII. Die Anzahl der nicht ähnlichen in M_6 enthaltenen Substitutionen ist 27.

Beweis. Es gibt Collineationen: 1 Indexes 1, 3 Indexes 2, 2 Indexes 3, 2 von 4, 1 von 5, 2 von 6; Transformationen[1] Q^2: B_6, B_9; B_{12}; (ab'), (bc'), a' in c mit invol. Paar $i_1 i_2$; (aa'), (bc'); (cb') mit cyclischem Tripel; (ab'), (bc'), (ca') mit $i_1 i_2$ und d oder cyclischem Tripel[2]; (ab'), (ba'), c' in c mit $i_1 i_2$; (ab'); (ba'), c' in c_1' in c_2' in c; (cc'), (ab'), a' in a_1' in b; (ab'), b' in c, c' in a; (cc'), a' in b, b' in a, und d; (ab), $(a_i b_i)$ $i = 1 \ldots 4$, und d; (ab), b_1 in a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$; Γ_6, Δ_3.

Theorem XCVIII. Die Anzahl der nicht ähnlichen in M_7 enthaltenen Substitutionen ist 64.

Beweis. Es gibt Collineationen: 1 Indexes 1, 3 von 2; 2 von 3, 1 von 4, 1 von 5, 3 von 6, 1 von 7, 1 von 10, 1 von 12; Q^2: B_6, B_9, B_{12}; (ab'), b' in c, c' in a und d; (cc'), (ab'), a' in a_1' in a_2' in b; (cc'), (ab'), a' in a_1' in b und d; (cc'), b' in a, a' in a_1' in b; (cc'), b' in a, a' in b und d, jede mit einem Doppelpunkte d; (ab'), b' in c, c' in a mit $i_1 i_2$; (cc'), (ab'), a' in a_1' in b mit $i_1 i_2$; (ab'), (ba'), c' in c_1' in c_2' in c_3' in c; (ab'), (ba'), c' in c_1' in c mit $i_1 i_2$; (cc'), (ab'), a' in a_1' in a_2' in a_3' in b; (cc'), b' in a, a' in a_1' in b und d; (cc'), b' in a, a' in a_1' in a_2' in b; (cc'), b' in b_1' in a, a' in a_1' in b; (ab'), (ba'), c' in c mit Tripel; (aa'), (bb'), (cc') mit zwei involutorischen Paaren oder Quadrupel; (ab'), (bc'), (ca') ebenso oder mit Tripel und d; (ab'), (bc'), a' in c und Tripel; (ab'), (bc'), a' in c mit $d_1 d_2 d_3$ oder $d_1 i_1 i_2$; (ab'), (bc') a' in a_1' in c und $i_1 i_2$; (ab'), (bc'), (cb') mit Quadrupel oder zwei Paaren; B_{12}', (B_{30}), B_{14}, B_{18}; Q^3: Γ_6 und d; (ab), $(a_i b_i)$ mit $d_1 d_2$ oder $i_1 i_2$; (ab), b_1 in a_1, $(a_i b_i)$ mit d; (ab), b_1 in b_1' in a_1, $(a_i b_i)$ mit d; (ab), b_1 in a_1, b_2 in a_2, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, Γ_6', Γ_6'', (Γ_8), (Γ_{10}); (ab), b_1 in b_1' in a_1, $(a_i b_i)$; (ab_1), (ba_1), $(a_i b_i)$ und $i_1 i_2$; Q^4: Δ_3 und d; Δ_6; (Δ_6^1); (ab), $(a_i b_i)$; E_4; Θ_2.

Theorem XCIX. Die Anzahl der nicht ähnlichen in M_8 enthaltenen Substitutionen ist 125.

Beweis. Es gibt Collineationen: 1 Indexes 1; 4 von 2; 2 von 3; 3 von 4; 1 von 5; 2 von 6; 1 von 7; 1 von 8; 1 von 10; 1 von 12; 1 von 15; Q^2: B_6, B_9, B_{12}; (cc'), (ab'), a' in a_1' in b und d; (cc'), (ab'), a' in a_1' in a_2' in b; (cc'), b' in a, a' in a_1' in b jede mit zwei Doppelpunkten oder $i_1 i_2$; (cc'), (ab'), a' in a_1' in b und cyclisches Tripel; (ab'), (ba'), c' in c_1' in c_2' in c mit $i_1 i_2$; (ab'), b' in c, c' in a; mit $d_1 d_2 d_3$ oder d_1, $i_1 i_2$ oder Tripel; (ab'), (ba'), c' in c_1' in c mit Tripel

---

1) (aa'), (bb'), c' in c_1' in c_2' in c ist reductibel auf Collineationen durch $(a^\lambda c' c_1' c_2' c)^3$; (aa'), (bb'), c' in c durch $(ac'c)^2$.

2) Ich bezeichne hier und in den späteren §§ mit Q^i eine Transformation der Ordnung i, während ich T^i für die i. Potenz einer Transformation schreibe.

B'_{12}, (B_{30}), B_{14}, B_{18}; (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in b; (cc'), b' in a, a' in a'_1 in a'_2 in b; (cc'), b' in b'_1 in a, a' in a'_1 in b, jede mit d; (cc'), (ab'), a' in a'_1 in b mit $d_1 d_2 d_3$ oder d_1, $i_1 i_2$ oder Tripel; (cc'), b' in a, a' in b ebenso; (B_{18}), B_{30}, B_{20}, B_{24}; (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in a'_4 in b; (cc'), b' in a, a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in b; (cc'), b' in b'_1 in a, a' in a'_1 in a'_2 in b; (ca'), (ac'), b' in b'_1 in b'_2 in b'_3 in b'_4 in b; (aa'), (bc'), (cb') oder (ab'), (bc'), (ca') mit Quintupel oder Tripel und $i_1 i_2$ oder (ab'), (bc'), (ca') mit Quadrupel und d; (aa'), (bb'), c' in c'_1 in c und Quadrupel oder zwei involutorische Paare; (ab'), (ba'), c' in c'_1 in c'_2 in c'_3 in c'_4 in c; (ab'), (ba'), c' in c und Quadrupel oder zwei Paare $i_1 i_2$; (ab'), (ba'), c' in c'_1 in c und Tripel; Q^3: (ab), $(a_i b_i)$ und $d_1 d_2 d_3$ oder d_1, $i_1 i_2$ oder Tripel; Γ_6; (ab), b_1 in a_1, $(a_i b_i)$ mit $d_1 d_2$ oder $i_1 i_2$; (ab), b_1 in b'_1 in a_1, $(a_i b_i)$ mit d_1; (ab), b' in b'_1 in b'_2 in a_1, $(a_i b_i)$; (ab), b_1 in a_1, b_2 in a_2, $(a_i b_i)$ mit d_1; (ab), b_1 in a_1, b_2 in a_2, b_3 in a_3, $(a_4 b_4)$; (ab), b_1 in b'_1 in b_1, b_2 in a_2, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$; Γ'_6, Γ''_6, (Γ_8), Γ_{10}) jede mit d; (ab_1), (ba_1), $(a_i b_i)$ mit Tripel; Γ_{12}, (Γ_{12}), (Γ'_{12}), (Γ''_{12}), (Γ_{14}), (Γ_{18}); (Γ_{30}); $(\varDelta_9)$, $(\varDelta_{12})$, $(\varDelta^1_6)$ $(\varDelta^1_{10})$; $\varDelta_3$ mit $d_1 d_2$ oder $i_1 i_2$; $\varDelta_6$; $\varDelta_8$; (ab), $(a_i b_i)$ mit d; (ab), b_1 in a_1, $(a_i b_i)$; E_6, E'_6, E''_6, E_4 mit d; (E_8); H_6; H^1_6; (H_{13}); Z_5, Θ_2, $(\Theta_6)'$, (K_4), I_4, N_3, Σ_2.

Um die typischen Characteristiken mit 7 Punkten zu haben, muss man mit jeder von M_6 oder M_7 oder M_8 mehrere Cyclen verbinden, welche zusammen $\sigma-6$ oder $\sigma-7$ oder $\sigma-8$ Punkte haben und überdies die typischen Characteristiken (ab) mit weniger als $\sigma-1$ einfachen Punkten sowie die Vertauschungen unter σ Buchstaben beifügen.

II. Theil.

Die endlichen Gruppen birationaler Transformationen. Die ersten fünf Typen.

Der neue Begriff der endlichen Gruppen von Characteristiken begreift als besonderen Fall die endlichen Gruppen von Transformationen in sich, denn da jede Transformation eine Characteristik besitzt, wird jeder Gruppe von Transformationen eine Gruppe von Characteristiken zugeordnet sein [1]) und um zu den Typen zu gelangen, würde man sich des Theoremes bedienen:

1) Zu einer Characteristik gehören entweder 0,1 oder ∞ Transformationen.

Theorem I. Wenn eine endliche Gruppe von Characteristiken constructibel (inconstructibel) ist, ist sie transponirt durch jede Transposition in eine endliche constructible (nicht constructible) Gruppe.

Ich werde dieses Verfahren nur für die Reduction auf die Typen anwenden, der grösseren Vorsichten wegen, die im Falle der Transformationen anzuwenden sind, werde ich dabei noch in Kürze den Beweis separirt mit Sorgfalt durchführen. Für die Untersuchung der Typen wähle ich jedoch directe Methoden und zwar in jedem Falle jene, welche mich am directesten zu meinem Ziele führt.

§ 1. Das Aequivalenztheorem.

Lemma. Jede Gruppe von Transformationen, welche ein Büschel von Geraden reproducirt, Ist eine Gruppe von Transformationen de Jonquières's mit (ab) im Scheitel des Büschels.

Theorem II. Jede Gruppe von Transformationen, welche ein invariantes Büschel von rationalen Curven gestattet, ist birational äquivalent einer Gruppe von Transformationen mit (ab).

Beweis. Man überträgt das Büschel in ein Büschel von Geraden, was in allen Fällen ohne Ausnahme möglich ist und man wendet das Lemma an.

Theorem III. Jede Gruppe von Transformationen, welche ein invariantes Netz von rationalen Curven gestattet, ist birational äquivalent einer Gruppe von Collineationen.

Beweis. Man überträgt das Netz in das Geradennetz, was nach Herrn Nöther (M. A. III) möglich ist und zwar in allen Fällen ohne Ausnahme und wendet das Lemma im I. Theil § 1 an.

Theorem IV. Jede endliche Gruppe von Transformationen, welche ein lineares ∞^1, ∞^2, ∞^3 System von C_3 mit 9, 7, 6, 5 festen Punkten invariant lässt, ist eine Gruppe von Transformationen mit nicht mehr als diesen 9, 7, 6, 5 Punkten in der Characteristik.

Dieses Theorem, dessen Natur rein arithmetisch ist, ist im Grunde dasselbe für Characteristiken wie für Transformationen.

Theorem V. Jede Gruppe von Transformationen, welche ein lineares ∞^1, ∞^2, ∞^3 System von elliptischen Curven invariant lässt, ist birational äquivalent einer Gruppe von Transformationen mit 9, 7, 6, 5 Punkten.

Der letztere Fall tritt namentlich häufig im $R_r\, r > 2$ ein. Cf. meine Noten in den Rendiconti Ist. Lomb. 8. und 21. November 1894. »Sopra le trasformazioni quadratiche periodiche nello spazio a r dimensioni.«

Das Theorem von Bertini-Martinetti über die Systeme elliptischer Curven[1]) und ihre Reduction auf Büschel von C_{3s} oder C_3 ist nämlich ohne Ausnahme von besonderen Lagen der Basispunkte anwendbar.

Theorem VI. Jede endliche Gruppe von Transformationen, welche ein invariantes System von Curven $C_{3s}\, a_1^s \ldots a_8^s$ besitzt, ist eine Gruppe mit nicht mehr als 8 Punkten, s willkürlich.

In diesem Falle kann die Transformation sicherlich keinen 9. Punkt besitzen (wie es etwa noch für $s = 1$ der Fall sein könnte) und zwar wegen der Relation $\Sigma\alpha = 3(n-1)$.

Theorem VII. Jede endliche Gruppe von Transformationen besitzt eine invariante Curve, deren Geschlecht jede willkürliche Grenze überschreiten kann, aber sicher > 2 ist.

Beweis. Das Theorem wurde für die Characteristiken bewiesen und dehnt sich, da es rein arithmetischer Natur ist, auf die Transformationen aus. Denn es ist unmöglich, dass alle Curven des invarianten Systemes ∞^2, welches verwendet wurde, sich zerlegen, indem man p, u so hoch erhalten kann, dass die unter diesen Curven hervorgebrachte Gruppe von Collineationen unendlich viele invariante Curven verlangt.

Die Existenz der erwähnten Curve folgt auch so. Es seien in R_r $x_i' = \varphi_i^{(1)}$; $x_i'' = \varphi_i^{(2)}, \ldots x_i^N = \varphi_i^{(N)}$ $(i = 1; \ldots r+1)$ die N Transformationen einer endlichen Gruppe, dann wird man in

$$\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i [x_i x_i' x_i'' \ldots x_i^{(N)}]^k = 0$$

eine Mannigfaltigkeit $M_{r-1}^{k(r+1)}$ haben, welche durch die Gruppe invariantiv ist.

Die α_i sind willkürlich und daher existiren unter dieser Unendlichkeit von M_{r-1} immer solche, welche keinen freien Doppelpunkt haben.

Corollar. Wenn eine Gruppe von Transformationen keine anderen invarianten Curven als solche mit $p = 1$ gestattet, kann sie nicht endlich sein.

Die Theoreme VIII, IX, X vom I. Theil § 2 gelten hier ohne Unterschied.

Theorem VIII. Wenn eine Curve mit $p > 2$, die nicht hyperelliptisch ist, mehrere Correspondenzen trägt, welche in birationalen Transformationen der Ebene enthalten sind, so bilden diese Transformationen nothwendig eine endliche Gruppe.

Beweis. Keine Curve $p > 1$ kann in einer unendlichen Gruppe

---

1) Hiezu gehört auch eine Note von G. B. Guccia in Rendiconti di Palermo 1887. Man vergleiche auch Kantor, Acta Math. XIX. p. 124.

von Collineationen enthalten sein, weil sie einerseits nicht eine Unendlichkeit von Correspondenzen enthalten kann und weil andererseits ein Ort mit $p > 2$ von Doppelpunkten in einer Collineation nicht zulässig ist. Sie kann aber auch nicht in einer unendlichen Zahl von Characteristiken invariant sein [1]), weil es nicht eine unendliche Anzahl von Characteristiken gibt, welche einen gegebenen Singularitätencomplex mit $p > 2$ invariant lassen und eine nicht hyperelliptische Curve mit $p > 2$, welche diesen Singularitätencomplex besitzt, kann nur eine endliche Zahl wirklicher Transformationen zulassen, da ich (Acta Math. Bd. XIX) bewiesen habe, dass durch einen Doppelpunktsort mit $p > 2$ die birationale Transformation der Ebene, welche sie enthält, auf eine endliche Anzahl Arten bestimmt ist.

Die Theoreme I. Theil XII, XIII, XIV gelten auch hier.

Theorem IX. Wenn eine endliche Gruppe birationaler Transformationen eine Curve reproducirt, reproducirt sie auch das System der adjungirten Curven, sowie jedes der successiven Systeme.

Beweis. Dies hat für die einzelnen Transformationen der Gruppe statt, deren jede, obzwar sie, abgesehen von der Gruppe, ein umfangreicheres System reproduciren kann, in der Gruppe nur das System ∞^{p-1} reproduciren kann.

Theorem X. Jede endliche Gruppe von Transformationen reproducirt ein ∞^1, ∞^2, ... ∞^6 System von elliptischen Curven oder ein ∞^n ($n > 1$) System von rationalen Curven, wenn sie nicht eine Gruppe von Vertauschungen oder von Transformationen de Jonquières's oder eine Gruppe des I. Theiles Theorems XIII oder eine äquimultiple Gruppe ist.

Beweis. Ich gehe von einer der invarianten Curven oder von den invarianten Systemen mit $p > 1$ aus, welche nothwendig in der Gruppe enthalten sind und wende die Verminderung der adjungirten Curven an. Wenn man selbe ohne Unterbrechung fortsetzen kann gelangt man am Ende entweder zu einem Systeme C_3 oder zu einem Systeme von C_2 oder von Geraden. Wenn eine einzige Gerade am Ende erscheint, geht man um einen Schritt zurück, wo man sich bei einem Systeme elliptischer Curven befunden haben musste [2]). Man kann sich aber unterwegs vor einem adjungirten Complexe $p = 1$ befinden; dann kann die Dimension des Systemes nach Martinetti [3]) nicht grösser als 9 sein. Im Falle des Systemes von rationalen Curven kann die Dimension des Systemes jede Grenze überschreiten.

---

1) Preisschrift p. 315.

2) Für den Fall mehrerer successiver elliptischer Systeme sehe man Acta Mathem. 1895, cit. Abh. I. Theil.

3) Rendiconti Ist. Lomb. 1886.

Theorem XI. Jede endliche Gruppe von Transformationen ist birational äquivalent einer Gruppe von Transformationen, welche ist

1. eine Gruppe von Collineationen,
2. eine Gruppe quadratischer Transformationen mit zwei festen Hauptpunktepaaren in Coincidenz,
3. eine Gruppe orthanallagmatischer Transformationen,
4. eine Gruppe, welche $\infty^1, \infty^2, \ldots \infty^6$ C_3, $p = 1$, also mit 9, 7, ... 3 gemeinsamen Punkten in sich transformirt.

Beweis. Von den Fällen des vorhergehenden Theoremes sind hier nur jene der elliptischen und rationalen Curven zu discutiren. Alle Systeme elliptischer Curven, deren Dimension > 1, sind nach dem citirten Theoreme von Bertini äquivalent einem $\infty^1, \ldots \overline{\infty}^9$ Systeme von C_3 oder einem ∞^8 Systeme von C_4 mit zwei festen Doppelpunkten. Wenn eine Anwendung des Theoremes X auf ein ∞^1 System von $C_{3s}\, a_1^s \ldots a_9^s$ geführt hätte, so müsste die Ausgangscurve wegen der Vollständigkeit des Systems der adjungirten Curven (Theorem von Christoffel) ebenfalls eine Curve C_{3s} dieser Art gewesen sein. Wenn die Gruppe ein $\infty^7, \infty^8, \infty^6$ System von C_3 in sich transformirt, kann sie nur eine Gruppe von Collineationen sein, es bleiben also die $\infty^1, \ldots \infty^6$ Systeme. Wenn die Transformation das ∞^8 System von C_4 reproducirt, kann sie nur 1. oder 2. des Theoremes sein. Alle Systeme rationaler Curven sind nach Jung [1]) birational äquivalent einem Systeme von $C_n\, a^{n-1}$ mit etwaigen einfachen Beweispunkten. Aber in diesem Systeme existirt immer eines, das sich in eine feste Curve und eine variable Gerade durch (ab) zerlegt. Die Transformation muss also direct das Geradenbüschel (ab) in sich transformiren, also orthanallagmatisch sein.

Theorem XII. Jede Gruppe mit 3 oder 4 Punkten ist eine Gruppe von quadratischen Transformationen und Collineationen, jede Gruppe mit 5 Punkten eine Gruppe aus quadratischen und cubischen Transformationen.

Theorem XIII. Die Gruppen aus XII sind nicht reductibel auf die Gruppen 1. 2. 3 aus XI, wie es für die Gruppen von Characteristiken der Fall war.

Denn man kann hier keinen gemeinsamen Doppelpunkt für alle Transformationen der Gruppe voraussetzen. § 5 wird übrigens volle Gewissheit bringen.

Theorem XIV. Die Classe mit 9 Punkten des Theoremes VI ist immer äquivalent einer endlichen Gruppe mit 8 Punkten.

---

1) In der Abh. von Neapel ist IV. Theil § 5 XVIII zu schreiben: System von C_3 oder System von Curven $C_{3s}\, a_1^s \ldots a_8^s$.

1. Beweis. Wir sind darauf mittelst eines invarianten Systemes elliptischer Curven gekommen und haben also eine Gruppe, welche das Büschel von C_3 in sich transformirt. Wenn wir nun durch irgend eine verschiedene Wahl niemals auf ein anderes System als auf ein solches kommen, wo man mit einem Büschel von C_{3s} mit 9 Punkten endigt, so besitzt die Gruppe keine anderen invarianten Curven als nur elliptische und kann daher nach dem Corollare zu VII nicht endlich sein. In allen anderen Fällen ist sie reductibel auf 8 Punkte.

2. Beweis. Die Gruppe kann nicht äquimultipel sein, weil es in diesem Falle gewiss ist, dass sie nur Systeme elliptischer Curven in sich transformirt. Mittelst XXI § 2 des I. Theiles ist dann zu schliessen, dass ein invariantes System $p = 0$, $u > 0$ oder eine invariante Curve $p = 0$ existirt, welche als Fundamentalcurve dienen kann. Die Gruppe ist also entweder äquivalent mit 1., 2. aus XI oder ist nicht reductibel in der Anzahl der Punkte.

Theorem XV. Jede endliche Gruppe von Transformationen mit $\sigma < 9$ ist äquivalent einer Gruppe von Collineationen oder einer orthanallagmatischen Gruppe oder einer äquimultiplen Gruppe mit $\sigma < 9$.

Beweis wie für XXI des I. Theiles § 2.

Wir haben also das Endtheorem:

Theorem XVI. *Jede endliche Gruppe von birationalen Transformationen ist äquivalent entweder*

1. einer Gruppe von Collineationen oder

2. einer orthanallagmatischen Gruppe oder

3. einer Gruppe quadratischer Transformationen M_2 *mit* (aa'), (bb') *oder* M_2' *mit* (ab'), (ba') *oder*

4. 5. 6. einer Gruppe quadratischer Transformationen 3, 4 oder quadratischer und cubischer mit 5 festen Punkten (M_3, M_4, M_5) *oder*

7. 8. 9. einer Gruppe von Transformationen mit 6, 7, 8 Punkten.

Theorem XVII. Um die allgemeinsten Typen zu haben, muss man jeder Gruppe aus XVI noch eine Anzahl untereinander transformirter gewöhnlicher Punktgruppen hinzufügen.

Es ist klar, dass die so aufgefassten Gruppen ebenso typisch sind wie jene des Theorems XVI.

Theorem XVIII. Die nicht hyperelliptischen Curven, welche eindeutige Correspondenzen tragen, welche sämmtlich in birationalen Transformationen der Ebene enthalten sind, sind birational äquivalent mit invarianten Curven in einer der typischen Gruppen des Theoremes XVI.

Ich hebe hier ausdrücklich hervor, dass nicht alle Curven, welche eindeutige Correspondenzen enthalten, diese in einer birationalen ebenen

Transformation haben, obzwar sie durch einfach rationale Transpositionen (nach A. Hurwitz Math. Ann. XXXII) solchen Curven äquivalent sind, welche in einer linearen Homologie der Ebene invariant sind.

Wenn eine Curve eine endliche Gruppe von Correspondenzen enthält, wird jede in einer einfach rationalen Transformation der Ebene enthalten sein, aber man kann leicht beweisen, dass für jede Curve des Geschlechtes $p > 0$ unendlich viele einfach rationale Transformationen existiren, welche alle Punkte der Curve ungeändert lassen. Die Gruppe der ebenen Transformationen wird also unendlich sein.

Man bemerke, wie diese Art, das binäre Gebiet des Geschlechtes p von der umgebenden Mannigfaltigkeit abhängig zu machen, sich wesentlich von jener des Herrn Hurwitz unterscheidet. Derselbe sucht, dem Brillschen Verfahren folgend, ein System von Curven, welches natürlich vom Geschlechte p ist, um die Correspondenz auf der Curve auszuschneiden, ich suche, um auf der Curve nicht die Correspondenz, sondern nur das zweite der Punktgebiete, die mit einander in Correspondenz sind, auszuschneiden, ein System von Curvenbüscheln, welches System natürlich vom Geschlechte p ist, und alle diese Büschel sind in einem einzigen Netze enthalten. Alle diese Netze jedoch sind nicht eine lineare ∞^3 Mannigfaltigkeit.

Eine neue Classe von Problemen eröffnet sich nun hiebei: 1. Für eine algebraische Curve vom Geschlechte p die einfach rationale, ebene Transformation des kleinsten Ranges k oder der kleinsten Ordnung zu finden, welche alle Punkte der Curve ungeändert lässt. 2. Für eine algebraische Curve vom Geschlechte p, welche eine eindeutige Correspondenz trägt, die einfach rationale Transformation vom kleinsten Range zu finden, welche diese Correspondenz enthält.

Hiebei wird unter »enthalten« verstanden, dass von den einem Punkte entsprechenden k Punkten einer in der Curve enthalten und zwar gerade der Nachfolger in der Correspondenz sei. Für $p = 0$, $u > 0$, und $p = 1$, $u > 0$ ist die Gruppe von Correspondenzen auf der Curve stets in einer Gruppe birationaler Transformationen der Ebene enthalten; aber nicht für $p = 0$, $u \gtreqless 0$.

§ 2. **Die endlichen Gruppen von Collineationen.**

Dieselben sind von Herrn C. Jordan angegeben worden. Der Vollständigkeit wegen gebe ich sie hier an. Sie sind in geometrischer Deutung:

1. Eine Gruppe, welche einen Punkt und eine nicht incidente Gerade fest lässt,
2. Eine Gruppe, welche drei Geraden unter einander vertauscht,

3. Die Gruppe, welche auf einem Kegelschnitte die Ikosaedergruppe hervorruft,

4. Die Gruppe, welche eine harmonische Curve 3. Ordnung in sich transformirt,

5. Die Gruppe, welche ein Paar syzygetische harmonische Curven 3. Ordnung unter einander transformirt,

6. Die Gruppe, welche überhaupt die Wendepunktsconfiguration in sich transformirt[1]),

7. Die Gruppe, welche die Curve C_4, $x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 = 0$ in sich transformirt.

Man erkennt hieraus die beiden folgenden Theoreme:

Theorem XIX. Jede endliche Gruppe von Collineationen der Ebene lässt entweder ein Büschel oder ein Netz von Curven 3. Ordnung ungeändert.

Es ist kein Zweifel, dass dieses Theorem auch auf direct algebraischem Wege erhältlich sein muss. Ich muss mich hier begnügen, einige Theoreme anzuführen, die noch nicht ausgesprochen sind und hiezu nützen können oder im 3. Theile verwendbar sind.

Theorem XX. Wenn zwei endliche Gruppen von Collineationen der Ebene, welche nicht cyclisch sind, isomorph sind, sind sie identisch.

Theorem XXI. Jede endliche Gruppe von Collineationen im R_r, welche einen linearen Raum R_i ungeändert lässt, lässt auch einen nicht mit jenem incidenten R_{r-i-1} ungeändert.

Theorem XXII. Jede endliche Gruppe von Collineationen im R_r, welche eine M_i^n von Punkten ungeändert lässt, lässt auch eine Einhüllende M_i^n von R_{r-1} ungeändert.

Jede endliche Gruppe von Collineationen im R_r, welche eine Mannigfaltigkeit n. Ordnung von R_i ungeändert lässt, lässt auch eine Mannigfaltigkeit n. Ordnung von R_{r-i-1} ungeändert.

§ 3. **Die orthanallagmatischen Gruppen.**

Die erste Frage ist die nach den endlichen Gruppen involutorischer Homologieen, deren Charakteristikengruppen also in der Gruppe der t_i (I. Th. § 6) enthalten sind. Sollen solche Homologieen in eine Gruppe eintreten, so müssen auf jeder Geraden durch (ab) ebensoviel Involutionen als Transformationen T vorhanden sein. In einer binären Gruppe kommen allerdings mehrere Involutionen vor, aber ihre Doppelpunktspaare müssen bestimmte gegenseitige Lage haben. Die Dop-

---

1) Diese Bedeutung der Gruppen 4. 5. 6 finde ich nirgends ausgesprochen.

pelpunktsörter der Transformationen müssen also von allen Geraden durch T in Punktepaaren solcher gegenseitiger Lage geschnitten werden. Von solchen Curven sind die einfachsten Fälle diese:

Nimmt man durch einen Punkt D Geradenpaare, welche die Doppelpunktselemente der in einer binären Gruppe enthaltenen quadratischen Involutionen bilden und bestimmt für (ab) die Involutionen, welche diese Geradenpaare als Doppelpunktsörter haben, so bilden diese Involutionen eine endliche Gruppe der Ebene.

Wenn man zwei Kegelschnitte C, C' der Lage hat, dass von zwei Chordalgeraden $s_1 s_2$ die s_1 nach C und die s_2 nach C' übereinstimmende Pole π haben, so bilden C, C' und eine C_3, welche π als Tangentialpunkt der Schnittpunkte von C, C' besitzt, die Doppelpunktsörter von drei Homologieen, welche eine endliche Gruppe bilden.

Man muss im 1. Falle auch die übrigens binären lin. Transformationen verwenden, welche in der Gesammtgruppe enthalten sind, um weitere periodische Homologieen zu construiren, die zur Gruppe gehören. Im 2. Falle ist dies aber nicht möglich, weil die Schnittpunktepaare mit den Kegelschnitten nicht rational zerlegt werden können.

2. Eine allgemeinere Gruppe von 3 Involutionen des Indexes 2 erhält man, wenn man in einer involutorischen Homologie in Bezug auf eine Directrix $C_n (ab)^{n-2}$ eine invariante Curve $C_m (ab)^{m-2}$ bestimmt, dann in Bezug auf diese neuerdings eine Homologie einrichtet und die Zusammensetzung beider, was wieder eine involutorische Homologie ist, hinzufügt. Ich übergehe es hier, die Ordnungen der Homologien von der gegenseitigen Lage der C_m und C_n abhängig zu machen.

Man erhält die allgemeinste Gruppe höherer Homologien, in welcher höhere Indices enthalten sind, wenn man drei Curven $C_M (ab)^{M-1}$: D_1, D_1', D_2 nimmt und auf jeder Geraden eine bestimmte binäre Gruppe completirt, in welcher D_1, D_1' im Doppelpunktepaare einer Transformation, D_2 im einen Doppelpunkte einer bestimmten anderen Transformation schneidet, dann D_2 durch D_2' zu einem Paare completirt und so die weiteren Doppelpunktsörter bestimmt, welche sämmtlich $C_M (ab)^{M-1}$ werden.

3. Eine Methode, um orthanallagmatische Gruppen mit gegebenem (ab) zu construiren, ist die folgende:

Wenn man die Punkte O eines Kegelschnittes K_2 den Cyclen einer Projectivität unter den Stralen von (ab) eindeutig zuweist und dann eine gegebene Projectivität unter den Punkten von K_2 von O aus auf den entsprechenden Cyclus projicirt, so erhält man eine Transformation, welche die gegebenen Cyclen unter den Geraden von (ab) enthält. Nimmt man aber auf K_2 eine endliche binäre Gruppe und weist die O nicht blos Cyclen sondern je einer invarianten Gruppe von Stralen

in einer anderen binären Gruppe unter den Stralen von (ab) zu, so erhält man durch die Projection von den O aus auf diese Stralengruppen eine endliche Gruppe von Transformationen der Ebene.

Man kann noch verallgemeinern, indem man die binäre Gruppe auf K_2 nicht für alle Stralengruppen von (ab) fest nimmt, sondern ein rationales System solcher Gruppen und es den Stralengruppen von (ab) eindeutig zuweist und dann von den O jeweils die Projection auf die Stralengruppe macht.

Jedenfalls erkennt man die Richtigkeit des folgenden Theoremes:

Theorem XXIII. Damit eine Gruppe von Transformationen mit (ab) endlich sei, ist nothwendig, dass sie unter den Stralen von (ab) eine endliche Gruppe hervorbringe und für jede solche endliche Gruppe ist auch eine endliche Gruppe von Transformationen der Ebene construirbar.

4. Etwas allgemeinere Gruppen erhält man durch folgende Betrachtung:

Theorem XXIV. Wenn die Tangenten einer $C_n a^{n-2}$ eine endliche Gruppe bilden, so enthält die C_n eine endliche Gruppe eindeutiger Correspondenzen, deren Ordnung doppelt so gross ist [1]).

Denn jede Projectivität H unter den Tangenten zieht zwei Correspondenzen Γ, Γ' nach sich und zur Projectivität $H_1 H_2$ gehören die Correspondenzen $\Gamma_1 \Gamma_2$, $\Gamma_1 \Gamma_2'$, welche identisch sind mit $\Gamma_1' \Gamma_2$, $\Gamma_1' \Gamma_2'$, weil $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cdot g$, $\Gamma_2' = \Gamma_2 g$ und $\Gamma g = g \Gamma$, wo g die inhärente Involution.

Theorem XXV. Wenn eine Curve $C_n a^{n-2}$ eine endliche Gruppe eindeutiger Correspondenzen enthält, kann man stets auf unendlich viele Arten endliche Gruppen von birationalen Transformationen finden, welche diese Correspondenzen hervorbringen.

Beweis. Man bestimme irgend eine Curve $C_m a^{m-2}$, welche die Geraden durch a in Punktepaaren schneidet, welche zu den Punktepaaren von C_n harmonisch sind und welche unter ihren Tangenten dieselben Projectivitäten gestattet. Wie eine solche Curve zu construiren wäre, habe ich in Rendiconti di Palermo l. c. auseinandergesetzt. Aber man kann sich auch einer $C_m a^{m-1}$ bedienen zusammen mit ihrer bezüglich C_n harmonisch zugeordneten. Ein solches Curvenpaar gestattet die Projectivität wegen der Rationalität. Nun bestimme man für jede Projectivität unter je zwei entsprechenden Stralen von a eine Punktprojectivität, welche die Punkte in C_n zu entsprechenden

1) Cf. Kantor: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1895: Sur les courbes hyperelliptiques, qui portent des correspondances univoques.

hat und ebenso die Punkte in C_m unter sich und in C'_m unter sich oder C_m und C'_m vertauscht. In beiden Fällen liefern die ∞^1 Projectivitäten eine periodische Punkttransformation der Ebene und die Gesammtheit derselben eine endliche Gruppe. Die Ordnung dieser Gruppe kann also gleich der Ordnung der Gruppe unter den Punkten von C_n gemacht werden, aber sie kann auch zu einer Gruppe von doppelt so hoher Ordnung vervollständigt werden.

Während es zweifelhaft erscheint, ob die in 3. construirte Gruppe eine invariante $C_n a^{n-2}$ besitze, welche irreductibel ist, hat man hier eine solche Gruppe direct construirt.

5. Theorem XXVI. Jede endliche Gruppe von Characteristiken, deren Directrixgruppe H mit dem Kreistheilungstypus oder dem Doppelpyramidentypus verträglich ist, ist construirbar mit einem invarianten Kegelschnitte.

Denn man kann jede constructible Characteristik (ab) construiren mit einem invarianten Kegelschnitte, indem man die Projectivität unter den Stralen so festlegt, dass die Tangenten aus (ab) an den Kegelschnitt jede in sich transformirt oder unter einander vertauscht werden. Hiebei ist jedesmal das eine Fundamentalsystem willkürlich, das zweite bestimmt sich gemäss den Verkettungen und der vorgelegten Stralenprojectivität.

§ 3. Die Gruppen M_2 und M'_2.

1. Die Gruppe M_2. Die Transformationen haben alle (aa'), (bb') gemeinsam. Man findet die ganze Gruppe, indem man in (aa') eine endliche Gruppe binärer Projectivitäten H_1, H_2, H_3, . . . und in (bb') eine andere Gruppe binärer Projectivitäten J_1, J_2, J_3, . . . annimmt und auf irgend eine der Isomorphie entsprechende Art die H mit den J combinirt. Man kann sogar alle H mit allen J combiniren. Die Gruppen M_2 könnte man also classificiren nach dem Vorkommen der 5 binären Gruppen in den beiden Strahlbüscheln a, b und man erhielte so 15 aus diesem Eintheilungsgrunde verschiedene Classen von Gruppen.

2. Die Gruppe M'_2. Um sie zu studiren, definiren wir besser die Transformation (ab'), (ba'). Es existirt eine Projectivität H, welche die Geraden durch a in die Geraden durch (ba') überführt und eine J, welche die Geraden durch b in die Geraden durch (ab') überführt. Die zweite Transformirte einer Geraden durch a mittelst der Transformation Q^2: (ab'), (ba') finden, heisst, dass man HJ^{-1} zusammensetzt. Aber $HJ^{-1}H$ ist die 3. Transformirte, daher man sagen kann, dass man aus einem Paare entsprechender Geraden im Büschel a (vermöge T^2) ein

Paar entsprechender Geraden im Büschel b erhält, indem man das erste Paar durch HJ^{-1} überträgt. Also:

Theorem XXVII. Die Wiederholung einer Transformation (ab'), (ba') ist von der Natur, dass die Projectivität in a' die Uebertragung der Projectivität in a ist.

In einer Gruppe M_2' bilden die Wiederholungen der Q^2: (ab'), (ba') mit den Q^2: (aa'), (bb'), welche unabhängig von jenen in der Gruppe enthalten sind, eine Gruppe M_2. Daher:

Theorem XXVIII. Die allgemeinste Gruppe M_2' wird erhalten, indem man in irgend einer Gruppe M_2 jedesmal zwei Projectivitäten aus a und a', welche gleiche absolute Invarianten haben, combinirt, was durch willkürliche Annahme einer einzigen Projectivität von a nach a' geschieht.

3. Diese Gruppen lassen sich direct auf endliche Gruppen von Transformationen des R_r verallgemeinern, indem man die beiden Stralbüschel a, a' durch λ lineare Systeme von R_{r-1} ersetzt.

§ 5. **Die Gruppen M_3, M_4, M_5.**

1. Die Gruppe M_3. Mit Rücksicht auf die 3 Fundamentalpunkte gibt es vier Classen:

α. Jedes der drei Stralbüschel a, b, c ist durch alle Transformationen in sich transformirt. Diese Gruppe setzt sich zusammen aus Collineationen, welche a, b, c zu Doppelpunkten haben und aus involutorischen Transformationen (aa'), (bb'), (cc'). Die Doppelstrahlenpaare der letzteren müssen in jedem Punkte a, b, c die Doppelpaare der quadratischen Involutionen einer binären Doppelpyramidengruppe sein. Man nehme also in a und b je eine Doppelpyramidengruppe, welche ab, ac und ba, bc resp. zum Scheitelelementenpaare besitzt und combinire jede quadratische Involution der einen mit jeder quadratischen Involution der anderen, aber stets nur zwei, welche in den Gruppen gleichen Character in Bezug auf die Scheitelelemente haben, da man sonst auch quadratische Transformationen erhielte, welche ausser a, b, c noch an a, b, c unendlich nahe Fundamentalpunkte besitzen, die Gruppe also nicht mehr M_3 würde.

Die sämmtlichen Collineationen der Gruppe bilden einen Jordanschen 1. Typus und daher kann man sagen:

Theorem XXIX. Die M_3 erster Art wird erhalten, indem man mit einer Gruppe von Collineationen mit drei festen Doppelpunkten eine involutorische quadratische Transformation combinirt, welche die Doppelpunkte als (aa'), (bb'), (cc') besitzt.

β. Ein Stralbüschel, etwa a, ist in sich transformirt, die beiden anderen b, c werden unter einander vertauscht. Die Periodicität von (aa'), (bc'), (cb') hängt nur von der Periodicität des Stralbüschels (aa') ab. Die beiden festen Kegelschnitte können harmonisch zu $2(bc)$ und $ab + ac$ willkürlich angenommen werden. Wenn man daher unter den Kegelschnitten des von $2(bc)$ und $ab + ac$ gebildeten Büschels eine Doppelpyramidengruppe festsetzt mit $2(bc)$, $ab + ac$ als Scheitelelementen und jede Involution derselben, welche die Scheitel vertauscht, mit allen Projectivitäten einer Kreistheilungsgruppe unter den Geraden durch (aa') mit ab und ac als festen Elementen combinirt, so erhält man eine endliche Gruppe von Transformationen (aa'), (bc'), (cb') nebst Collineationen.

Diese Gruppe ist noch frei von (aa'), (bb'), (cc'), kann aber noch mit solchen Transformationen combinirt werden. Die Zusammensetzung zweier Transformationen (aa'), (bc'), (cb') und (aa'), (bb'), (cc') liefert eine Collineation, welche a in a, b in c in b verwandelt, unter den Kegelschnitten des vorigen Büschels eine Involution mit $2(ac)$ und $ab + ac$ als Paar hervorruft und daher jedenfalls eine involutorische Homologie ist. Daher:

Theorem XXX. Die allgemeinste Gruppe M_3 2. Art wird erhalten, indem man eine endliche Gruppe von Collineationen mit drei festen Doppelpunkten mit einer Transformation (aa'), (bb'), (cc') und einer willkürlichen (aa'), (bc'), (cb') über diesen drei Punkten in allen möglichen Weisen combinirt.

γ. Die Stralbüschel a, b, c werden nur cyclisch unter einander vertauscht. Dies kann durch eine Collineation oder auch durch eine Transformation (ab'), (bc'), (ca') geschehen. Wendet man aber auf (aa'), (bb'), (cc') eine Collineation an, welche a in b in c in a vertauscht, so entsteht (ab'), (bc'), (ca') und durch Zusammensetzung zweier der letzteren entsteht eben eine jener Collineationen. Die allgemeinste Gruppe von Collineationen, welche hierher gehört, entsteht aber durch Combination einer Gruppe mit drei Doppelpunkten mit einer willkürlichen Collineation, welche die drei Doppelpunkte cyclisch vertauscht. Daher:

Theorem XXXI. Die allgemeinste Gruppe M_3 dritter Art entsteht, indem man eine endliche Gruppe von Collineationen mit festen Doppelpunkten a, b, c mit einer willkürlichen Transformation (aa'), (bb'), (cc') und mit einer willkürlichen Collineation verbindet, welche a, b, c cyclisch vertauscht.

δ. Es können nun die Stralbüschel a, b, c auf alle mögliche Arten unter einander vertauscht werden. Durch Zusammensetzung zweier

Transformationen (aa'), (bc'), (cb') und (bb'), (ca'), (ac') entsteht eine Collineation, welche a b c cyclisch vertauscht und ebenso aus (aa'), (bc'), (cb'), mit (ab'), (bc'), (ca') entsteht a in c in a, b in b und umgekehrt. Hat man also (aa'), (bc'), (cb'), so ist es nicht nöthig, die Collineationen a in c in a, b in b weiter hinzuzufügen, ja nicht einmal die Collineationen a in b in c in a, wenn zwei wesentlich verschiedene (aa'), (bc') (cb') vorhanden sind. Also:

Theorem XXXII. Die allgemeinste Gruppe M_3 vierter Art entsteht, indem man eine endliche Gruppe von Collineationen mit drei festen Doppelpunkten a, b, c mit einer Transformation (aa'), $(bb',)$ (cc'), und zwei Transformationen (aa'), (bc'), (cb') und (ab'), (ba'), (cc') combinirt. Diese Gruppe enthält aber jedesmal eine Untergruppe, welche entsteht, indem man die Gruppe von Collineationen nur mit zwei willkürlichen Transformationen (aa'), (bc'), (cb') und (ab'), (ba'), (cc') combinirt und welche also weder (aa'), (bb'), (cc'), noch (ab'), (bc'), (ca') enthält. Enthält sie eine dieser Characteristiken, so enthält sie stets auch die andere.

ε. Auch die Gruppen M_3 können in äusserst interessanter Art auf den R_r verallgemeinert werden, indem man λ lineare Systeme von R_{r-1} oder sogar von $R_{i_1}, \ldots R_{i_\lambda}$ nimmt, namentlich aber auf die sogenannten Reciprokaltransformationen mit $r+1$ festen Fundamentalpunkten.

2. Die Gruppe M_4. Da alle Characteristiken mit 4 Punkten construirbar sind und jeder Characteristik in diesem Falle nur eine Transformation zugehört, so folgt, dass diese Gruppe von Transformationen identisch mit der zugehörigen Gruppe von Characteristiken ist und 96 Transformationen enthält. Auch sie kann in verschiedener Art auf den R_r verallgemeinert werden.

3. Die Gruppe M_5. Ueber die Construirbarkeit einer quadratischen oder cubischen Transformation mit einer Characteristik von 5 Punkten entscheiden die beiden Theoreme, welche ich in meiner Preisschrift verwendet, aber schon früher gefunden hatte: 1. Ueberträgt eine quadratische Transformation aa', bb', cc' die Punkte p_1, p_2 in p'_1, p'_2, so besteht eine Collineation a in a', b in b', c in c', welche p_1 in p'_2, p_2 in p'_1 überträgt. 2. Giebt es eine cubische Transformation $a^2 b^2$, $a_i b_i$, so giebt es auch eine Collineation, welche a in b, a_i in b_i überführt. — Das zweite Theorem entsteht durch zweimalige Anwendung des ersten. Ich füge dem nun ein 3. Theorem hinzu, welches im III. Theile nützlich ist:

Wenn $d_1^2 d_2^2 d_3^2 e_1 e_2 e_3$, $\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ *die Fundamentalsysteme einer*

biquadratischen Transformation sind, so sind $d_1\varepsilon_1$, $d_2\varepsilon_2$; $d_3\varepsilon_3$; $e_1\delta_2$; $e_2\delta_3$, $e_3\delta_1$ *sechs linear abhängige Punktepaare und umgekehrt.*

Die einzigen Transformationen, welche über fünf Punkten ohne Besonderheit in deren Lage bestehen können, sind also Q^2: (aa'), (bb'), (cc') mit einem involutorischen Paare und Q^3: (ab), $(a_i b_i)$ $i = 1 \ldots 4$. Solcher Transformationen können immer 15 combinirt werden, 10 Q^2 und 5 Q^3: Daher:

Theorem XXXIII. Ueber 5 willkürlichen Punkten besteht eine Gruppe von der Ordnung 16, welche ausser der Identität durchwegs involutorische Transformationen enthält.

Diese Gruppe enthält gleichzeitig alle möglichen Fundamentalsysteme. Sind aber zwei Transformationen T_1, T_2 mit einem selben Fundamentalsysteme des einen Gebietes vorhanden, so liefert $T_1 T_2^{-1}$ eine Collineation. Also auch so folgt, dass die Existenz weiterer Transformationen, also einer umfangreicheren Gruppe, von der Existenz von Collineationen unter den 5 Punkten abhängt. So kann man aussprechen:

Theorem XXXIV. Es giebt fünf verschiedene Gruppen M_5 der Ordnungen 15, 2. 15, 6. 15, 4. 15, 10. 15.

Eine ist die oben in XXXIII erwähnte. Eine zweite gehört zu zwei involutorischen Paaren nebst einem Doppelpunkte einer Collineation, eine dritte zu einem cyclischen Tripel und zwei Doppelpunkten, eine vierte zu einem cyclischen Quadrupel und einem Doppelpunkte, eine fünfte zu einem Quintupel einer Collineation. In jedem dieser Fälle entsteht die ganze Gruppe durch die Zusammensetzung von Gruppe XXXIII mit den Collineationen. Die Gruppe XXXIII ist ersichtlich eine invariante Untergruppe.

Auch die Gruppen M_5 können in interessanter Art auf den R_r verallgemeinert werden.

Ad notam.

Bevor ich zu der Untersuchung der weit schwierigeren Gruppentypen M_6, M_7, M_8 schreite, habe ich von dem Verhältnisse meiner Theorie zu den von Herrn Autonne in den Comptes rendus de l'Ac. des Sc. publicirten Noten über endliche Gruppen quadratischer und cubischer Transformationen zu sprechen. Im Jahre 1883 construirte ich die ersten endlichen Gruppen und zwar M_4 und jene Gruppen, welche beim Typus B_6 von selbst auftreten. Im Sommer 1884 lernte ich die Noten von Herrn Autonne über die Gruppen quadratischer Transformationen kennen, deren Resultate ich also um diese

Zeit in vollständigerer Form besass. Seine 1. Note über Gruppen cubischer Transformationen (October 1884) war mir entgangen. Als ich seine 2. Note vom 25. Juli 1885 kennen lernte, besass ich bereits die im § 1 des II. Theiles hier auseinandergesetzte Methode vollständig und hatte auch die Problemstellung, wie sie dieser Schrift zu Grunde liegt, bereits erdacht. An den cubischen Gruppen, welche er als 2. Kategorie bezeichnet, war ich achtungslos vorbeigegangen, weil sie mir in der orthanallagmatischen Classe enthalten waren und die Maximalordnung der Transformation für mich kein Eintheilungsgrund war.

Was nun die quadratischen Gruppen betrifft, fehlen ihm die M_3 beinahe gänzlich, die wahre Bedingung für die Existenz der M_2 und M_2' entgeht ihm ebenfalls.

Die cubischen Gruppen sind mit den Gruppen M_5 einerseits und mit orthanallagmatischen Gruppen andererseits erschöpft. Herr Autonne kennt aber auch hier nicht ihre Bedeutung als Typen.

In der ersten Abhandlung im Liouvilleschen Journale hat er nichts Neues oder Wesentliches hinzugefügt, während ich die zweite Abhandlung bis zu diesem Augenblicke nur nach dem ungefähren Titel kenne.

Ueber die M_5 hinaus konnte Herr Autonne nicht vorwärts gehen, ohne meine Resultate der Neapeler Preisschrift zu kennen oder sie selbst zu finden.

Es ist also nöthig, hier festzustellen, dass vom ganzen I. Theile dieser Arbeit bei Herrn Autonne sich keine Spur findet, ihm überhaupt der Begriff »Characteristik« und umsomehr der Begriff »Gruppe von Characteristiken« fehlt. Ganz dasselbe gilt für die Methoden und Resultate des hier folgenden III. Theiles bis zum Ende. Die Begriffe, Probleme und Methoden der §§ 1, 3 des II. Theiles sind ebenfalls vollständig neu und mir eigen. Die Gruppen quadratischer und cubischer Transformationen endlich scheinen durch die gegenwärtige Darstellung nicht nur an Vollständigkeit und neuen Eigenschaften, sondern auch an Einsicht in ihre Natur gewonnen zu haben, gegenüber den algebraischen Formeln des H. Autonne, welche leicht daraus mittelst eines Coordinatensystemes hergestellt werden, das immer in bequemster Weise auf die Fundamentalpunkte verlegt wird[1]).

---

1) Ich hebe hervor, dass die Resultate des III. Theiles sowie dieses Theiles § 1 bereits in einer von mir 1885 bei der Pariser Akademie deponirten verschlossenen Note enthalten sind.

III. Theil.

Die typischen Gruppen von Transformationen mit 6, 7, 8 Punkten in der Characteristik.

Der schwierigere Theil des Problemes der Aufzählung der Typen ist der auf die Gruppen mit mehr als 5 Punkten bezügliche, weil dann die Bedingungen für die Punkte der Characteristik schon für den Grad 2 nicht mehr leicht zu formuliren sind. Die Methoden, welche einzuschlagen sind, sind verschieden, aber identisch mit jenen, die sich mir bereits bei den einzelnen Transformationen mit Erfolg bewährt haben.

§ 1. Die typischen Gruppen M_6 mittelst der geometrischen Figuren.

Theorem I. Wenn 6 Punkte eine allgemeine Lage haben, gestatten sie keine Transformation 5. Ordnung, welche sie zur Characteristik haben würde.

Beweis. Die Wiederholung ist eine Collineation, welche die 6 Punkte unter einander transformiren müsste. Aber die Characteristik $(a_i a_i')$ würde verlangen, dass jede Gerade $a_i a_k$ sich selbst entspreche, also jeder Punkt der Ebene. Dass die Characteristiken der Theoreme II. III eine besondere Figur verlangen, wird sofort bewiesen werden.

Theorem II. Die Transformation Q^5: $(a_1 a_2')$, $(a_2 a_1')$, $(a_3 a_4')$, $(a_4 a_3')$, $(a_5 a_6')$, $(a_6 a_5')$ existirt, sobald die Geraden $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$ durch einen selben Punkt der Ebene gehen und umgekehrt.

Ich habe bewiesen[1]), dass die 6 Paare von Fundamentalpunkten immer zwei linear abhängige Punktsextupel (nach Clebsch[2])) bilden. Also muss $a_1 (a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)\, \Pi\, (a_2' a_3' a_4' a_5' a_6')$, was ausdrückt, dass auf dem Kegelschnitte $(a_2 \dots a_6)$ die drei Geraden $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$ drei Paare einer quadratischen Involution ausschneiden, also convergent seien. Die Transformation ist äquivalent mit (ab), $(a_i b_i)$, $(i = 1 \dots 4)$.

Theorem III. Die Transformation Q^5: $(a_1 a_1')$, $(a_2 a_2')$, ... $(a_6 a_6')$ existirt überhaupt nicht, ohne dass mindestens dreimal zwei Punkte unendlich nahe rücken.

Man beweist es durch Uebertragung auf die Q^2: (aa'), (bb'), (cc').

---

1) Wiener Denkschriften XL.

2) Math. Ann. VI. Cf. auch die Arbeiten von H. Rosanes.

Theorem IV. Die Transformation Q^5: $(a_1 a_2')$, $(a_2 a_1')$, $(a_3 a_3')$, $(a_4 a_4')$, $(a_5 a_5')$, $(a_6 a_6')$ existirt, wenn $a_1 a_2$ die Kegelschnitte $a_3 a_4 a_5 a_6 a_1$ und $a_3 a_4 a_5 a_6 a_2$ berührt.

Beweis durch die Transposition auf (aa'), (bb'), (cc') mit einem Doppelpunkte und einem involutorischen Paare.

Theorem V. Die Transformation Q^5: $(a_1 a_2')$, $(a_2 a_1')$, $(a_3 a_4')$, $(a_4 a_3')$, $(a_5 a_5')$, $(a_6 a_6')$ existirt nicht, ohne dass $a_5 a_6$ unendlich nahe sind.

$(a_5^2 a_1 a_2 a_3 a_4)^3$ überträgt in drei involutorische Paare $a_1 a_2$, $a_3 a_4$, $a_5 a_6$ einer Homologie, weshalb diese 6 Punkte in einen Kegelschnitt zu liegen kommen, woraus durch Rücktransposition der Satz folgt.

Wenn nun 6 Punkte nur zweimal die Transformation II gestatten sollen, so müssen sie vier Punkte eines Vierecks mit zwei auf einer Diagonale gelegenen Punkten sein.

Theorem VI. Wenn die 6 Punkte dreimal die Characteristik II gestatten, so gestatten sie eine Collineation vom Index 3, welche die 6 Punkte in zwei cyclische Tripeln theilt.

Beweis. Durch Zusammensetzung zweier Characteristiken erhält man sofort die Collineation. Die 6 Punkte bilden also zwei dreifach perspective Dreiecke.

Theorem VII. Die Figur VI gestattet auch die Transformation $(a_1 a_2')$, $(a_2 a_3')$, $(a_3 a_4')$, $(a_4 a_5')$, $(a_5 a_6')$ und umgekehrt.

Beweis durch Zusammensetzung einer der Characteristiken II mit der Collineation des Indexes 3.

Corollar. Die Transformation VII fordert die Figur VI.

Theorem VIII. Die Transformation $(a_1 a_2')$, ... $(a_5 a_1')$, $(a_6 a_6')$ existirt nicht.

Beweis. Gemäss meinem Theoreme müsste $a_6 (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) \pi (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$. Aber wegen der Wiederholung existirt die ebene Collineation a_6 in a_6, a_1 in a_3 in a_5 in a_2 in a_4 in a_1, also a_6 ist der 3. freie Doppelpunkt, und $a_1 \ldots a_5$ sind in einem invarianten Kegelschnitte, womit aber die aufgeschriebene Projectivität unverträglich ist.

Theorem IX. Die Transformation $(a_1 a_1')$, $(a_2 a_2')$, $(a_3 a_4')$, ... $(a_6 a_3')$ existirt nicht.

Beweis. Die Geraden $a_1 (a_3 a_4 a_5 a_6)$ entsprechen durch die Transformation den Geraden $a_1 (a_6 a_3 a_4 a_5)$ und ebenso $a_2 (a_3 a_4 a_5 a_6)$ den $a_2 (a_6 a_3 a_4 a_5)$ also haben beide Quadrupel dasselbe Doppelverhältnis und daher sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ conconisch.

Theorem X. Die Transformation $(a_1 a_2')$, $(a_2 a_1')$, $(a_3 a_4')$, ... $(a_6 a_3')$ existirt nicht.

Beweis. Die Geraden $a_1 (a_3 \ldots a_6)$ sind in $a_2 (a_6 \ldots a_5)$ in $a_1 (a_5 a_6 a_3 a_4)$ verwandelt. Hieraus folgt die Figur von oben nach V. Aber $a_1 a_2$

ist in sich transformirt, und $a_3 a_4, \ldots a_6 a_3$ schneiden sie in einem cyclischen Quadrupel, während $a_3 a_5$, $a_4 a_6$ sie in einem involutorischen Paare schneiden, also $a_1 a_2$, $a_3 a_5$, $a_4 a_6$ müssen convergent sein, was mit jener Figur unverträglich ist.

Theorem XI. Vierfach tritt die Transformation II nur bei der Figur zweier vierfach perspectiven Dreiecke auf.

Bereits ältere Untersuchungen haben bewiesen, dass die einzige Figur mit 4 Convergenzen die zweier vierfach perspectiver Dreiecke ist.

Theorem XII. Die Figur zweier Dreiecke, welche einander conjugirt sind, gestattet sechsfach die Figur II, ebenso die Figur dreier wechselseitig harmonischer Punktepaare.

Es ist wolbekannt, dass zwei solche Tripel sechsfach perspectiv sind und jeder solchen Perspectivität entspricht eine Transformation II. Sind auf drei Seiten eines Dreieckes auf jeder Seite zwei Punkte harmonisch zu den Ecken genommen, so liefern dieselben paarweise zwei Convergenzen auf der 3. Seite, also insgesammt 6.

Corollar. Wenn die Figur von einem cyclischen Quadrupel und einem involutorischen Paare einer Collineation des Indexes 4 in der Ebene 6 mal die II gestattet, ist sie mit der vorigen ersten Figur identisch.

Theorem XIII. Die Figur von 5 cyclischen Punkten einer Collineation des Indexes 5 zusammen mit einem freien Doppelpunkte ist 10fach Sextupel von Brianchon und gestattet 10 mal die Transformation II.

Dies ist eine von Clebsch[1]) entdeckte Figur, welche nachher durch die Untersuchungen von F. Klein weitere Beleuchtung gefunden hat[2]).

Theorem XIV. Jede der 6 vorhergehenden Figuren liefert durch die Q^5, welche sie gestattet und durch ihre Collineationen eine endliche Gruppe, welche mit Ausnahme der 1. und 2. Figur typisch ist.

In der 2. Figur seien $p_1 p_2$ die Punkte, auf welchen sich (ab) und d_1 einerseits und d_1', (ab) andererseits befinden, genommen in den cubischen Involutionen, welche den beiden Q^5 äquivalent sind. Die Transposition durch $(p_1 p_2 a_1)^2$ gibt Reduction auf 5 Punkte und die Transposition $(a_2 a_3 a_4)^2$ gibt eine orthanallagmatische Gruppe. Keine der späteren Gruppen gestattet eine solche Reduction.

---

1) Math. Ann. IV p. 284: »Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5. Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseites.« § 17.

2) Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Math. Ann. XII. Cf. auch Schröter M. A. XLI.

Theorem XV. Die Gruppe XIII kann auf keine Weise erweitert werden.

Man muss alle Characteristiken, welche ich l. c. studirt habe, durchgehen, um sich zu überzeugen, dass sie diese Figur nicht besitzen.

Theorem XVI. Die 1. und 2. Gruppe kann mittelst einer cubischen involutorischen Transformation erweitert werden, wenn a_1 der Tangentialpunkt von $a_2 a_3 a_4 a_5$ auf einer cubischen Curve ist, welche auch durch a_6 geht.

Die Gruppe wird in diesem Falle typisch, aber sie würde reductibel bleiben, wenn die Berührungspunkte in $a_3 a_4 a_5 a_6$ und der einfache Durchgang in a_1 wären.

Theorem XVII. Die Figur von VI gestattet eine Erweiterung der Gruppe in zwei Fällen: 1. wenn die zwei Cyclen zwei Tangentialtripel einer selben Reihe einer C_3 werden, 2. wenn die C_3 harmonisch ist. Es sind in diesen Fällen bezüglich B_6 oder B_{12} möglich.

Um Nachlese zu halten unter den Gruppen, welche uns eventuell noch fehlen, gehen wir alle Classen von Transformationen mit 6 Punkten durch (cf. I. Theil § 8). Es ist nicht bloss nothwendig, die Typen durchzugehen, und etwa unter den äquivalenten Formen diejenige auszuwählen, welche die particulärste Figur hat, sondern um alle Transformationen aufzählen zu können, welche man über eine der so gefundenen Figuren vertheilen kann, muss man jede Transformation in allen Details kennen, obzwar sie nicht typisch ist. — In Ergänzung des in der Preisschrift II. Th. § 24 Gesagten wird man beweisen, dass die Transformation (aa'), (bc'), b' in b'_1 in c mit d_1 nicht über der Figur zweier sechsfach perspectiver Dreiecke construirbar ist. Es existirt eine Collineation, welche $a b'_1$ zu Doppelpunkten, $b b' c$ als Cyclus enthält, aber d_1 ist nicht der 3. Doppelpunkt, wie mittelst der Projectivität unter den Geraden von a zu beweisen ist.

B_9 ist niemals über der Figur zweier 6fach perspectiver Dreiecke constructibel. Dies soll eine irrthümliche Bemerkung auf p. 121 meiner cit. Abh. corrigiren. Allerdings existiren der B_9 äquivalente cubische Transformationen, welche jene Figur besitzen.

Q^2: (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c vom Index 8 verlangt eine Figur, welche sich von allen anderen unterscheidet, kann daher in keine endliche Gruppe eintreten.

Q^2: (aa'), (bb'), c' in c'_1 in c'_2 in c verlangt Alineation von $c' c'_1 c'_2 c$.

Q^2: (cc'), a' in b, b' in a verlangt die Figur eines cyclischen Quadrupels mit Doppelpunkt einer ebenen Collineation (l. c. II. Theil § 17. II).

Q^2: (ab'), (bc'), (cb') mit Doppelpunkt d und involutorischem Paare verlangt XII und über dieser Figur ist auch (aa'), (bc'), (cb') mit Doppelpunkten möglich.

Theorem XVIII. Die Figur von zwei 6fach perspectiven Dreiecken ist durch birationale Transpositionen über diesen 6 Punkten entweder in dieselbe Figur oder in eine einzige andere übertragbar.

Beweis. Man setzt die Transpositionen durch quadratische Transpositionen zusammen und diese sind von zwei Arten, entweder mit einem vollständigen Tripel als Fundamentaldreieck oder mit einem Punkte aus einem und zwei Punkten aus dem zweiten Tripel. Ueber der zweiten Figur existiren wieder zweierlei Transpositionen, von welchen sie die eine reproducirt, die andere zur 1. Figur zurückführt.

I. Die Gruppe mit a' in a, b' in b, c' in c. Lemma. Ueber der Figur zweier 6fach perspectiver Dreiecke existirt eine Gruppe von 36 ebenen Collineationen.

Dies sind die Collineationen, welche ein gewisses Paar von harmonischen C_3 des syzygetischen Büschels reproduciren, das durch den Schnitt der zwei Tripel bestimmt ist. Die Collineationen sind: 9 Involutionen, 8 vom Indexe 3 und die Identität, welche eine invariante Untergruppe zusammensetzen und 18 vom Indexe 4.

Wenn eine Transformation ein gewisses Fundamentalsystem in Σ über diesen 6 Punkten hat, wird es also, indem man sie mit den 36 Collineationen zusammensetzt, 36 Transformationen geben, welche dasselbe Fundamentalsystem in Σ, aber verschiedene in Σ' haben. Es existiren ersichtlich Q^2, welche ein Fundamentaltripel auf dem einen oder anderen der zwei 6fach perspectiven Tripel haben. Ich behaupte, dass es keine Q^2 gibt, welche drei andere der Punkte zum Fundamentalsysteme besässe. In diesem Falle würde auch eine Q^2 existiren, welche $a\,b\,c$ von $a'\,b'\,c'$ getrennt hätte und diese Characteristik würde entweder B_6 oder a' in a, b' in b, c' in c sein müssen, denn die 3. existirt nicht (l. c.). Aber in beiden Fällen würden die beiden Tripel dreifach perspectiv sein und eine neue Collineation vom Index 3 liefern, welche die zwei conjugirten Tripel nicht unter einander transformiren würde. Folglich gibt es im Ganzen $2 \cdot 36\, Q^2$.

Lemma. Es existiren 12 cubische involutorische Transformationen, welche die Punkte (ab), $(a_i b_i)$, d so vertheilt haben, dass (ab), d in einem selben Tripel enthalten sind.

Beweis. Der Kegelschnitt durch das andere Tripel und zwei Punkte p_2, p_3 des ersten berührt p_2p_1, p_3p_1 in p_2, p_3, also p_3 ist enthalten in der C_3, welche Ort der Doppelpunkte der cubischen Involution ist, die $a p_2 p_4 p_5 p_6 p_1^2$ als Fundamentalsystem besitzt, weil diese C_3 der Ort der Berührungspunkte der Geraden durch p_1 an die Kegelschnitte durch $p_2 p_4 p_5 p_6$ ist.

Es gibt also im Ganzen $12 \cdot 36\, Q^3$. Man schliesst wie für die Q^2, dass es nur $2 \cdot 36\, Q^4$ in der Gruppe gibt. Da sicherlich eine Q^5 existirt, gibt es $36 \cdot Q^5$. Also:

Theorem XIX. Die Gruppe über zwei 6fach perspectiven Tripeln enthält $18 \cdot 36 = 648$ Transformationen.

Die 2. Gruppe, welche ihr äquivalent ist, enthält 648 Transformationen, welche sämmtlich von den vorigen verschieden sind, darunter auch B_9 und (aa'), (bc'), b' in b'_1 in c.

II. Die Gruppe mit B_{12}. Theorem XX. Jede Transformation, welche über ihren 6 Punkten existirt, muss die C_h und das äquianharmonische Netz reproduciren (l. c. II § 26).

Beweis. Der zweite Theil ist evident, da das Netz vereinzelt ist. In dem Büschel F_1 von C_h und einer invariantiven C_3 ist der Index 3. Die Basis eines beliebigen Büschels hat also drei Punkte, durch welche drei Curven von F_1, ein in sich transformirtes Tripel, gehen. Wenn die Curven des Büschels sich osculiren, ist dieses Tripel coïncident, kann aber nicht mit der C_e identisch sein. Also: Der Ort der Punkte, wo zwei Curven des Netzes sich osculiren, ist die Curve C_h. Weder 12 noch 3 ähnliche Netze können existiren.

Theorem XXI. Die Gruppe von Correspondenzen, welche durch die gegenwärtige Gruppe unter den Punkten von C_h hervorgerufen ist, ist jene, welche man erhält, indem man die Gruppe von Correspondenzen, welche durch die Gruppe von Collineationen in C_h hervorgebracht ist, aus einem beliebigen Punkte der C_h auf C_h projicirt.

Beweis. Die Schnittpunktetripel von C_h mit den C_e sind unter einander transformirt und die Transformation unter dem Büschel ist eine Collineation. Die Tripel transformiren sich also wie die Schnittpunktetripel mit den Geraden der Ebene und es gibt 9 coincidente Tripel, welche auf 12 Arten selbst Tripel zusammensetzen. Es gibt 24 Tangentialtripel. Die Collineationen für C_h erscheinen also hier wieder als Correspondenzen unter diesen Schnittpunktetripeln.

Wird B_{12} als bekannt angenommen, so kennt man auch die Correspondenz und die Projectionscentra, um sie aus $u' - iu \equiv \frac{C}{3}$ abzuleiten und man kann die ganze Gruppe von Correspondenzen und also die ganze Gruppe von Vertauschungen unter den Curven C_e vervollständigen. Dann folgt:

Theorem XXII. Die gegenwärtige Gruppe ist die Zusammensetzung der construirten Gruppe von Correspondenzen mit der Transformation Δ_3, welche alle Curven C_e des invarianten Netzes in sich transformirt.

Es gibt in der Gruppe eine $\varDelta_3$, drei Involutionen 5. Ordnung und 6 cubische Involutionen (siehe den Beweis für I und l. c. III § 6 p. 260) welche alle mit $\varDelta_3$ vertauschbar sind und also 18 vom Index 6 geben (Typus B_6), 18 vom Indice 4, wovon 6 cubisch und 12 biquadratisch sind. Ausser den $2 \cdot 3$ Transformationen B_{12}, welche hierauf gemäss l. c. III § 26 vertheilbar sind, existiren $2 \cdot 6$ andere Transformationen vom Index 12, äquivalent mit B_{12}, aber biquadratisch und so, dass zwei doppelte und zwei einfache Punkte, wie folgt, coincidiren.

Durch die drei B_{12} hat man eine gewisse Zuweisung unter den Punkten der zwei Cyclen, etwa $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, $p_3 q_3$ und $p_1 p_2 p_3$, $q_1 q_3 q_2$ seien die zwei Tangentialcyclen. Die Characteristik bestimmt sich dann so:

$$\begin{matrix} p_1^2 q_3^2 p_3^2 & p_2 q_1 q_2 \\ p_3 q_2 q_3 & p_1^2 q_1^2 p_2^2 \end{matrix}$$

und 5 andere. Durch die Involutionen entstehen 24 Transformationen vom Indexe 3, alle vom Typus der Collineation und 2 sind Collineationen; diese liefern 18 Transformationen vom Index 6, worunter 6 der Ordnung 5, im Ganzen also 108.

III. Die Gruppe mit B_6. Sie enthält nur 9 Involutionen, wovon 3 von 5. Ordnung und 6 cubisch, eine Transformation $\varDelta_3$, 18 Transformationen vom Indexe 6, welche deren Zusammensetzungen sind, 24 Transformationen vom Indexe 3, welche durch die involutorischen Transformationen entstehen, im Ganzen 54.

Es bleiben noch übrig: die Figur des Hexagons von Clebsch mit 60 Collineationen und 60 Transformationen 5. Ordnung (von diesen hat Clebsch natürlich nicht gesprochen), die Figur von Γ_6, welche Transformation mit der involutorischen Homologie combinirt werden muss, welche die 6 Punkte unter einander transformirt und die anderen drei Figuren, welche mehrmals die Transformation II gestatten.

Im § 4 wird diese Aufzählung als vollständig verificirt werden.

§ 2. Die durch eine endliche Gruppe von Collineationen anallagmatischen Mannigfaltigkeiten[1]).

Dieselben Theoreme wie in II § 5 der Abhandlung: „Neue Theorie u.s.w. sind auch für die Gruppen auszusprechen:

Theorem XXIII. Wenn eine Gruppe von Collineationen eine Fläche reproducirt, welche eindeutig auf eine Ebene abbildbar ist, und

1) Die Verfahrungsarten dieses Paragraphen sind implicite in meiner Note der C. R. de Paris 5. Januar 1885 gegeben.

man bildet die in der Fläche enthaltene Umwandlung auf die Ebene ab, so erhält man eine Gruppe von birationalen Transformationen[1]).

Eine solche Gruppe transformirt ein lineares ∞^3 System von Curven in sich, wenn M_2^n in R_3 ist oder ein lineares ∞^r System, wenn M_2^n in R_r ist.

Theorem XXIV. Jede endliche Gruppe von birationalen Transformationen kann als Bild einer Gruppe projectiver Systeme unter den Punkten einer M_2^n in R_r erhalten werden.

Beweis. Die invarianten linearen Systeme, welche in II § 1 bewiesen wurden, werden i. A. mit demselben Index wie die Punkte der Ebene transformirt und bieten sich für eine Abbildung einer M_2^n in R_r dar und die Gruppe wird als Bild auf M_2^n eine Gruppe von Collineationen haben.

Theorem XXV. Eine endliche Gruppe von Collineationen in R_r kann keine andere M_2^n in sich transformiren ausser jener, welche als Abbildungssystem eines derjenigen haben, welche durch eine der typischen Gruppen von II § 1 anallagmatisch sind.

Beweis. Alle linearen Systeme, welche briational äquivalent sind, dienen immer für die Abbildung derselben M_2^n in R_r und man kann sich also mit den Typen begnügen und diese müssen invariant sein durch einen der Typen des § 1.

Theorem XXVI. Jede endliche Gruppe im R_r, welche eine abbildbare M_2^n in sich transformirt, transformirt auch eine cubische Fläche oder eine Fläche M_2^n mit $(n-2)$ facher Geraden oder eine der Flächen des Theoremes XXIX in sich.

Beweis. Durch ein beliebiges der invarianten ∞^r Systeme, welche gleichzeitig für einen vorgelegten Typus einer endlichen Gruppe von Transformationen existiren, ist die Gruppe von Collineationen im R_r vollständig bestimmt und die Gruppe muss also alle M_2^n in sich transformiren, welche als Bilder diese linearen Systeme haben, welche im selben Typus coëxistiren.

Corollar. Keine endliche Gruppe von Collineationen in R_r kann eine abbildbare M_2^n in sich tranformiren, wenn sie nicht holoëdrisch isomorph ist einer der typischen Gruppen birationaler Transformationen.

Theorem XXVII. Wenn verschiedene Abbildungsweisen für eine selbe M_2^n verschiedene Gruppen liefern, sind diese birational äquivalent.

---

1) Wenn eine Fläche, welche durch ihre eigenen Punkt-k-tupel auf die Punkte einer Ebene abbildbar ist, eine Gruppe von Collineationen gestattet, erhält man durch die Abbildung dieser Collineationen eine Gruppe von (k, k) deutigen Transformationen.

Denn indem man zwei Punkte zuordnet, welche Bilder desselben Punktes auf M_2^n sind, erhält man eine ein-eindeutige Relation unter den zwei Bildebenen.

2. Diese selben Theoreme gelten auch für die endlichen Gruppen birationaler Transformationen in R_r. So z. B.: Jede endliche Gruppe von birationalen Transformationen in R_r ist das Bild einer endlichen Gruppe projectiver Systeme auf einer M_r^n in $R_{r'}$, $r' > r$.

Eine Gruppe in R_r, welche eine abbildbare M_i^n in sich transformirt, ist holoedrisch isomorph einer Gruppe birationaler Transformationen in R_i. Das Theorem XXVI kann in R_r erst ausgesprochen werden, wenn man die typischen Gruppen für die niederen linearen Räume kennt.

3. Theorem XXVIII. Die Abbildung projectiver Systeme, welche auf einer M_{r-1}^2 durch eine endliche Gruppe von Collineationen in R_r entstehen, liefert eine endliche Gruppe quadratischer Transformationen mit einer gemeinsamen Fundamentalmannigfaltigkeit $M_{r-2}^2 = (CC')$[1].

Corollar. Wenn in R_3 die M_2^2 ein Kegel ist, erhält man in der Ebene eine besondere Gruppe M_2, wo (ab), $(a'b')$ unendlich nahe sind.

Theorem XXIX. Die typischen Gruppen mit 7 Punkten sind die Bilder der projectiven Systeme einer Gruppe unter den Punkten einer M_2^8 in R_6 und jene mit 8 Punkten, einer M_2^9 in R_6 oder einer M_2^8 in R_5.

Beweis. Die Curven $C_6 a_1^2 \dots a_7^2$ dienen für die Abbildung im einen Falle und die Curven $C_9 a_1^3 \dots a_8^3$, alle oder nur jene durch a_9, im anderen Falle. A priori ist es unerlaubt, eine Reduction in der Ordnung von M_2^n vorauszusetzen.

Theorem XXX. Die Collineationen in R_6, welche die Gruppen M_8 liefern, transformiren unter einander die 240 Curven $C_3\, p = 0$ einer gewissen Configuration, welche in M_2^9 enthalten ist.

Diese Curven C_3 sind die Bilder der Curven $p = 0$, $u = 0$, welche über den 8 Punkten zu bilden sind und von welchen wir im I. Theil § 7 sprachen. Jede C_3 ist in drei Punkten von einer anderen C_3, in zwei Punkten von 56, in einem Punkte von 126, in keinem Punkte von 56 getroffen.

Theorem XXXI. Die Collineationen in R_6, welche die Gruppen M_7 liefern, transformiren die 56 Kegelschnitte einer gewissen in M_2^8 enthaltenen Configuration unter einander.

---

1) Cf. Rendiconti Ist. Lombardo 1894 (8. und 21. November) meine Note: Sopra le trasformazioni quadratiche periodiche nello spazio di r dimensioni.

Diese Kegelschnitte sind auch die Bilder der Curven $p = 0$, $u = 0$ über den 7 Punkten. Jeder Kegelschnitt wird in zwei Punkten von 1 anderen, in 1 Punkte von 27, in keinem Punkte von 27 getroffen.

Theorem XXXII. Jede Mannigfaltigkeit M_i^n mit $(n-2)$ facher R_{i-1} in R_r ist eindeutig abbildbar auf einen linearen Raum R_i.

Dieses Theorem verallgemeinert ein wohlbekanntes Theorem von Nöther. Eine M_2^n, mit $(n-2)$ facher Geraden kann nur entweder im R_3 oder im R_4 existiren. Im R_4 jedoch ist sie stets eine Regelfläche, denn durch irgend zwei Punkte der M_2^n müsste ein Kegelschnitt derselben gehen als Schnitt mit einem R_3 durch die vielfache Gerade, aber ein derartiges System existirt nicht für $n > 4$, sodass jener Schnitt in zwei Geraden zerfallen muss.

Theorem XXXIII. Jede Gruppe von Collineationen, welche im R_3 eine Fläche M_3^n mit $(n-2)$ facher Geraden in sich transformirt, liefert in dieser M_2^n eine Gruppe von projectiven Systemen, welche durch die Abbildung auf die Ebene eine orthanallagmatische Gruppe liefern.

Das Abblildungssystem dieser M_2^n ist immer ein System von Curven C_{p+2} mit gemeinsamen p-fachen Punkte und dann wendet man das Lemma vom II. Theil § 1 an.

Theorem XXXIV. Jede endliche orthanallagmatische Gruppe in der Ebene ist das Bild einer endlichen Gruppe projectiver Systeme auf einer Fläche M_2^n mit $(n-2)$ facher Geraden oder einer Fläche[1]),

---

1) Jede endliche Gruppe von Collineationen der Form G)

$$x_1' : x_2' : \dots x_i' : \dots : x_{r+1}' = x_1 : \pm x_2 : \dots : \xi_1(x_3 \dots x_{r+1}) : \dots : \xi_{r+1}$$

transformirt eine Mannigfaltigkeit M_{r-1}^n in sich, welche $(n-2)$ fach durch die Gerade $x_3 = \dots = x_{r+1} = 0$ geht.

Denn die Mannigfaltigkeiten

$$x_1^2 \varphi_{n-2}(x_2 \dots x_{r-1}) + x_2^2 \psi_{n-2}(x_3 \dots x_{r+1}) + \chi_n(x_3 \dots x_{r+1}) = 0,$$

wo φ, ψ, χ invariant sind durch die endliche Gruppe unter den $x_3, \dots x_{r+1}$, genügen dem Theoreme.

Reciprok hat nothwendig jede Gruppe von Collineationen, welche eine Mannigfaltigkeit $M_{r-1}^n (X_1 X_2)^{n-2}$ in sich transformirt, die vorhergehende Form G).

Indem man nämlich die canonische Form der Mannigfaltigkeit anschreibt und die Vertheilung der Glieder gemäss den durch G) angenommenen Factoren anwendet, erhält man eine irreductible Mannigfaltigkeit nur dann, wenn die Collineation die vorausgesetzte Form hat. Ueberdies gilt noch:

Jede endliche Gruppe von Collineationen der Form G) transformirt auch in sich unendlich viele M_i^n, welche $(n-2)$ fach durch $X_1 X_2$ gehen.

auf welcher alle Ebenen eines Büschels eine Anzahl Kegelschnitte ausscheiden.

Denn es giebt eine anallagmatische Curve $C_p\, a^{p-2}$ von unbeschränkt hoher Ordnung. Auf derselben wird man nun jedenfalls den Punkten der Characteristik noch soviele in sich transformirte Gruppen von Punkten hinzunehmen können, dass dieselben insgesammt $x = mp - (m-2)(p-2) - 2 = 2(m+p) - 6$ unabhängige Punkte geben, wo übribens m nur der Bedingung $x + \frac{(m-2)(m-1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2} - 3$ zu genügen hat. (Es wird in den meisten Fällen, deren Discussion jedoch zu weit führen würde, möglich sein, m annähernd gleich p zu machen). Das durch diese Punkte und a^{m-2} gehende System von C_m als Abbildungssystem liefert das Theorem.

§ 3. **Die typischen Gruppen von M_6 durch die Methode der Abbildung der cubischen Fläche.**

Ich habe in der »Neuen Theorie der periodischen Transformationen in der Ebene« (Acta Math. 1895) das folgende Theorem bewiesen:

Theorem XXXV. Die cubischen Flächen ohne Doppelpunkt in R_3, welche anallagmatische Collineationen gestatten, sind:

1. $X_1^3+X_2^3+X_3^3+X_1^2X_2+X_1^2X_3+X_2^2X_1+X_2^2X_3+X_3^2X_1+X_3^2X_2+X_4^2X_1+X_4^2X_2+X_1X_2X_3$
   $1,\ 1,\ 1,\ -1$
2. $X_1^3+X_2^3+X_1^2X_2+X_2^2X_1+X_3^2X_1+X_3^2X_2+X_4^2X_1+X_4^2X_2+X_1X_3X_4+X_2X_3X_4$
   $1,\ 1,\ -1,\ -1$
3. $X_1^3+X_2^3+X_3^3+X_4^3+X_1^2X_2+X_2^2X_1+X_3^2X_1+X_3^2X_2+X_1^2X_3+X_2^2X_3+X_1X_2X_3$
   $1,\ 1,\ 1,\ \varepsilon_3$
4. $X_1^3+X_2^3+X_3^3+X_4^3+X_1^2X_2+X_2^2X_1$ $\qquad \varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon$
5. $X_1^3+X_2^3+X_3^3+X_4^3+X_1^2X_2+X_2^2X_1+X_1X_3X_4+X_2X_3X_4$
   $\varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon$
6. $X_3^3+X_4^3+X_4^2X_3+X_3^2X_4+X_2^2X_1+X_1^2X_4+X_1^2X_3$ $\qquad 1,\ i,\ -1,\ -1$
7. $X_1^3+X_2^2X_1+X_1X_3X_4+X_3^2X_2+X_4^2X_2$ $\qquad 1,\ -1,\ i,\ -i$
8. $X_1^3+X_2^3+X_4^3+X_1^2X_2+X_2^2X_1+X_3^2X_1+X_3^2X_2$ $\qquad \varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ 1,\ -1,\ \varepsilon$
9. $X_1^3+X_2^3+X_3^3+X_4^2X_1+X_1X_2X_3$ $\qquad \varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ -1$
10. $X_1^3+X_2^3+X_3^3+X_4^2X_1+X_2^2X_3+X_3^2X_2$ $\qquad \varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ -1$
11. $X_1^3+X_3^3+X_2^2X_1+X_4^2X_3$ $\qquad \varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ -1,\ \varepsilon,\ -\varepsilon$
12. $X_1^3+X_2^2X_1+X_3^2X_2+X_4^2X_3$ $\qquad i^4 = 1 \qquad 1,\ -1,\ -i,\ \sqrt{i}$
13. $X_1^3+X_2^2X_3+X_3^2X_4+X_4^2X_2$ $\qquad \varepsilon^9 = 1 \qquad 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^7,\ \varepsilon^4$
14. $X_1^3+X_3^3+X_2^2X_1+X_4^2X_2$ $\qquad i^4 = \varepsilon^3 = 1 \qquad 1,\ -1,\ \varepsilon,\ i.$

Theorem XXXVI. Die Form 14. gestattet stets die lineare Umwandlung in

$$x_4^3 + H(x_1, x_2, x_3) = 0$$

wo H eine ternäre cubische Form mit $T = 0$.

Denn die $C_3 = X_1^3 + X_2^2 X_1 + X_4^2 X_2$ hat $p = 1$ und gestattet eine Collineation vom Index 4 und ist also harmonisch.

Theorem XXXVII. Die Formen 4, 10, 11, 13 gestatten stets die lineare Umwandlung in

$$x_4^3 + E(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma x_i^3 = 0$$

wo E eine ternäre cubische Form mit $S = 0$.

Ich habe anderwärts bewiesen [1], dass wenn eine C_3 eine Collineation gestattet, welche den Index 3 und die drei Doppelpunkte in C_3 hat, die C_3 äquianharmonisch ist. 10. und 11. führen sofort zur zweiten Form.

Theorem XXXVIII. Die Formen 3, 8 gestatten immer die lineare Umwandlung in

$$x_4^3 + L(x_1, x_2, x_3) = 0$$

wo L eine willkürliche cubische ternäre Form ist.

Dies hat seinen Grund darin, dass jede C_3 involutorische Homologien gestattet.

Theorem XXXIX. Die Form 12. gestattet niemals eine weitere Gruppe.

Beweis. Die Form wird Null durch $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und durch $x_3 = 0$ [2], $a_{111} x_1^2 + a_{221} x_2^2 = 0$. Ueberdies ist die Gleichung befriedigt durch

$$x_1 - \lambda x_3 = 0, \; x_3 a_{111} \lambda^3 + \tfrac{1}{2} x_2 a_{332} \pm x_4 \sqrt{-a_{111} a_{443} \lambda^3} \text{ wo } \lambda^4 = \frac{a_{332}^2}{4 a_{111} a_{221}}$$

Ferner

$$x_2 + \mu x_1 - \lambda x_3 = 0, \; \lambda a_{332} x_3 + (a_{221} \lambda^4 - \mu a_{332}) x_1 \pm x_4 \sqrt{-\lambda a_{332} a_{443}} = 0$$

wo

$$\lambda^4 = \frac{a_{332} a_{111}}{a_{221}^3}, \quad \mu^2 = \frac{a_{111}}{a_{221}}.$$

Diese Configuration von Geraden beweist, dass für willkürliche Werthe der a_{ikl} es unmöglich andere convergente Geradentripel gebe.

---

1) Cr. J. Bd. 95.

2) Ich muss hier die Coefficienten einführen, die bisher, so lange auf sie nichts ankam, unterdrückt wurden.

Also die ganze Gruppe muss x_4 reproduciren und die Formen $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ unter einander vertauschen. Für $x_4 = 0$ gibt die Form n. 12 ... $a_{111} x_1^3 + a_{221} x_2^2 x_1 + a_{332} x_3^2 x_2$, welche $T = 0$ hat und invariant sein muss. Ueberdies muss $Ax_4 + Bx_3 = 0$ ungeändert bleiben, ebenso $Ax_1 + Bx_2 + Cx_4$ und die Tangentenebene im letzteren Punkte an C_3. Also ist die Collineation durch F_3 individualisirt.

Theorem XL. Die Form 5. gestattet die Umwandlung in die Form $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 0$ mit willkürlichen Coefficienten.

Eine solche Collineation ist also auch für $\Sigma x_i^3 = 0$ vorhanden. In jedem Falle ist die Kante $X_3 X_4$ eine Kante des Pentaeders, was man beweist, indem man die Polaren der Punkte dieser Geraden nach F_3 bildet. Wenn F_3 zwei solche Collineationen gestattet, können sich die beiden Kanten schneiden oder nicht. Wenn die Kanten sich begegnen, geben die zwei Collineationen durch Zusammensetzung eine involutive Collineation n. 2., welche zweier convergenter Tripel bedarf und die Fläche besitzt also n. 6. Wenn die zwei Kanten sich nicht treffen, ist die Fläche die Diagonalfläche.

Theorem XLI. Die Form 1. besitzt ein convergentes Geradentripel und umgekehrt.

Es reicht hin, den 2. Theil zu beweisen. Die 1. Polare des Scheitels zerlegt sich in die Tangentenebene und eine andere Ebene, was die involutorische Homologie enthält.

Corollar. Die Form 1. gestattet i. A. keine andere Collineation.

Theorem XLII. Wenn die Form 1. zwei involutoriche Homologieen gestattet und nur zwei, gestattet sie auch die Collineation n. 2.

Beweis. Die zwei Geradentripel müssen eine gemeinsame Gerade haben und durch Zusammensetzung geben die zwei Collineationen eine andere, welche alle Punkte dieser Geraden zu Doppelpunkten hat. Aber weil auch die Ebenenpaare um diese Gerade dieselben in den zwei Homologieen sind, wird die neue Collineation zwei windschiefe Doppelpunktsgeraden haben, wo dann der Index nicht 3 sein kann, weil sonst $\Sigma x_i^3 = 0$ eintreten müsste, qu. e. d.

Corollar I. Die Form 2. gestattet stets zwei involutorische Homologien und zwar in der beschriebenen Art.

Corollar II. Die 2. Axe trifft zwei Kanten des Pentaeders, während die erste eine Diagonale des Pentaeders ist.

Theorem XLIII. Wenn F_3 drei Homologieen n. 1. gestattet, sind die drei Centren auf einer Kante c des Pentaeders und die Ebenen der drei Tripel gehen durch den Gegenscheitel. Diese F_3 gestattet immer auch n. 5.

Denn zwei der Tripel müssen sich auf der Schnittlinie ihrer Ebenen begegnen und es folgt das dritte. In jeder Ebene durch die Kante hat man eine C_3, welche die 3 Tangentenebenen osculirt und also eine Collineation vom Indexe 3 gestattet, deren 3. Doppelpunkt der Pol von c bezüglich der drei Tangenten ist. Da alle diese Pole auf einer Geraden sind, ist die Gesammtheit dieser Collineationen eine Collineation des Raumes. Reciprok beweist man leicht:

Theorem XLIV. Die Form 5. gestattet immer 3 Homologieen Indexes 2 wie eben beschrieben.

Theorem XLV. Die einzige F_3 mit 4 involutorischen Homologieen ist jene, in welche die vorhergehende sich specialisirt durch die Lage des Gegenscheitels der F_3. Diese F_3 gestattet n. 9.

Die 4. Involution ist ausgezeichnet in der Gruppe und gibt also durch Zusammensetzung mit der Collineation des Indexes 3 eine des Indexes 6. Umgekehrt schliesst man:

Die Form 9. gestattet immer 4 harmonische Homologieen, 3 Involutionen n. 2, einmal n. 5 und einmal n. 9, also insgesammt 12.

Theorem XLVI. Wenn F_3 5 Homologieen gestattet, gestattet sie 6 und die Scheitel sind die Seiten eines ebenen Vierseites des Pentaeders.

In diesem Falle gestattet F_3 12 mal die Collineation n. 2 und die Gruppe ist die der gesammten Vertauschungen von vier Ebenen des Pentaeders, welche die 5. Ebene festhalten. In diesem Falle gestattet die F_3 also stets auch die Collineation 7.

Theorem XLVII. Wenn F_3 10 Homologieen 1. gestattet, ist sie die Diagonalfläche von Clebsch[1]) und gestattet die 120 Collineattonen, welche die 5 Ebenen des Pentaeders unter einander vertauschen.

Die 12 übrigen Geraden bilden eine Doppelsechs und indem man mit dieser abbildet, erhält man die in § 1 Th. IX erwähnte Figur, welche auch der Schnitt mit den 6 Axen Indexes 5 des Icosaeders ist.

Theorem XLVIII. Die cyclische Gruppe n. 6 gestattet i. A. keine weitere Collineation.

Die Fläche besitzt ein einziges convergentes Geradentripel, Schnitt von $x_1 = 0$ mit dem Polynom in x_3, x_4, welches invariant bleiben muss, also auch die Ebene $x_2 = 0$ und der Punkt X_1, aber 6. gestattet keine der übrigen canonischen Collineationen. Wenn ein anderes Tripel existirt, existiren deren wenigstens drei, aber die Fläche des Th. XLVII kann keine Collineation des Indexes 4 gestatten, weil

1) Math. Ann. VI die bereits in § 1 citirte Abhandlung.

jene, welche eine harmonische Curve gestatten, keine Inflexionsgeraden invariant lassen. Dann folgen also weitere Geradentripel.

Theorem XLIX. Die Form 7. gestattet keine andere Collineation, ohne mit der Fläche von 6 Homologieen zu coincidiren.

Beweis. Die Form enthält zwei convergente Geradentripel und um ein anderes zu enthalten, muss sie 4 weitere gestatten. Endlich ist wegen der ebenen Configurationen $(3_2, 2_3)$ und $(9_4, 12_3)$ auszusprechen:

Theorem L. Wenn die Fläche von 6 Homologieen eine einzige andere Collineation gestattet, gestattet sie deren 10 oder 9 (Diagonalfläche oder Form 3).

Durch Zusammenfassung entsteht nun:

Theorem LI. Alle Gruppen von Collineationen, welche eine cubische Fläche ohne Doppelpunkte in sich transformiren, sind die folgenden [1]:

I. Die Gruppe von $X_4^3 + L(X_1, X_2, X_3) = 0$.
II. Die Gruppe von $X_4^3 + H(X_1, X_2, X_3) = 0$.
III. Die Gruppe von $X_4^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0$.
IV. Die Gruppe der Diagonalfläche.
V. Die cyclische Gruppe der Collineation des Index 8.
VI. Die Gruppe der n. 5 (3 involutorischen Homologieen).
VII. Die Gruppe der n. 9 (4 involutorischen Homologieen).
VIII. Die cyclische Gruppe der Ordnung 4 aus n. 6.
IX. Die cyclische Gruppe der Ordnung 4 aus n. 7 mit 3 involutorischen Homologieen.
X. Die Gruppe der Fläche mit 6 involutorischen Homologieen.
XI. Die Gruppe von n. 2.
XII. Die cyclische Gruppe der einzigen involutorischen Homologie.

Es bleiben die mit Doppelpunkten behafteten Flächen zu discutiren. Wenn ein einziger Doppelpunkt existirt, ist er unveränderlich und die Gruppe auf F_3 einer Gruppe ebener Collineationen äquivalent. — Für zwei Doppelpunkte X_1, X_2 bleiben fest die Gerade $X_1 X_2$, die Tangentenebene längs dieser Geraden, die dritte Schnittgerade $\mathfrak{g}$

1) Der Anwendung wegen wiederhole ich hier ein Theorem aus Acta Math. 1895:

Die Form 14. liefert B_{12}, 13. B_9, 12. (ab'), (bc'), a' in $a_1^!$ in c, d_1, 11. (ab'), (bc'), (ca'), d_1, i_1 in i_2 in i_1, 10. a' in a, b' in b, c' in c, 9. Γ_6, 8. B_6, 7. die Collineation vom Index 8, nämlich ein Quadrupel und ein involutorisches Paar, 6. (cc'), a' in b, b' in a mit d_1, 5. zwei cyclische Tripel einer Collineation, 4. drei Doppelpunkte und ein cyclisches Tripel einer Collineation, 3. Δ_3, 2. 2 Doppelpunkte und 2 involutorische Paare einer Collineation, 1. die cubische Involution (ab), $(a_i b_i)$, $(i = 1 \ldots 4)$ d_1.

mit der Fläche und ihr Schnittpunkt mit $X_1 X_2$, sowie der zweite asymptotische Schnittpunkt auf ξ. Die Gruppe hat 4 gemeinsame Doppelpunkte und kann also immer als cyclische Gruppe betrachtet werden. Wenn man sich zur Abbildung der Geraden ξ bedient, hat man Reduction auf M_5. Wenn ξ mit $X_1 X_2$ coincidirt, bleiben die zwei Ebenen durch $X_1 X_2$, welche Geradenpaare enthalten, fest und ebenso diese 4 Geraden oder sie werden vertauscht und dann bleiben die zur Tangentenebene conjugirte Ebene und daher vier Doppelpunkte fest.

Im Falle von 3 Doppelpunkten muss man die uni- oder biplanaren Punkte, die in der Anzahl eins vorhanden sind, vernachlässigen. Wenn die 3 Punkte conisch sind, existiren drei complane Geraden in drei Tangentenebenen in $X_1 X_2$, $X_2 X_3$, $X_3 X_1$ und deren Ebene $X_1 X_2 X_3$ in einer unveränderlichen Geraden schneidet. Also auch der Pol dieser Geraden bezüglich $X_1 X_2 X_3$ bleibt unverändert und die Gruppe besteht in Collineationen des Indexes 3 und des Indexes 2. — Wenn die 3 Doppelpunkte biplanar sind, gestattet die Fläche ∞^2 Collineationen (s. Cr. J. Bd. 95). — Die Fläche mit 4 Doppelpunkten gestattet nur Collineationen, welche die Ebene der 3 Geraden und ihren Pol bezüglich des Tetraeders fest lassen. Die Gruppe ist identisch mit jener des Theoremes XLIX.

§ 4. **Fortsetzung.**

Ich wende jetzt die Methode des § 2 auf die hier abgeleiteten cubischen Flächen an.

Theorem LII. Die Abbildung von XII liefert die involutorische Transformation (ab), $(a_1 b_1)$, ... $(a_4 b_4)$ mit einem Doppelpunkte.

Es genügt, in das Abbildungssextupel eine der drei unveränderlichen Geraden zu nehmen. Die Kegelschnitte, welche eine zweite schneiden, sind unveränderlich und bilden sich als Gerade eines Büschels ab [1]).

Theorem LIII. Die Abbildung von XI liefert zwei cubische Transformationen und eine quadratische Transformation (aa'), (bb'), (cc') mit involutorischem Paare $i_1 i_2$.

Beweis. Wenn man mit einem Sextupel abbildet, deren 5 Geraden die gemeinsame Gerade der zwei Tripel schneiden, erhält man eine Gruppe mit einem Büschel unveränderlicher Geraden; wenn man aber mit einem Sextupel abbildet, welches zwei Geraden der zwei Tripel enthält, erhält man die beschriebene Gruppe.

---

1) Acta Math. 1895. Bd. XIX. p. 149.

Theorem LIV. Die Abbildung von VI liefert zwei dreifach perspective Tripel und also die Gruppe von § 1 Theorem VI. Die Abbildung von VII liefert zwei vierfach perspective Tripel und gibt die Gruppe von § 1 Theorem XI.

Die Ebene der 4 Centren ist unveränderlich und die Sextupel schneiden sie in 3 mit dem 4. Centrum alineirten Paaren und welche dreifache Perspectivität mit den Centren auf der Kante des Pentaeders haben.

Theorem LV. Die Abbildung von VIII und IX liefert den Typus (cc'), b' in a, a' in b (Preisschrift II. Th. § 1. II) und eine von 2 cubischen involutorischen Transformationen und einer Collineation des Indexes 4 gebildete Gruppe.

Diese zwei letzteren sind die Folge der zwei Geradentripel, welche auf der Fläche existiren. Diese zweite Gruppe ist irreductibel in der Zahl der Punkte.

Theorem LVI. Die Abbildung von X und V gibt die Figur von drei harmonischen Punktepaaren auf den drei Seiten eines Dreieckes und die cyclische Gruppe von (ab'), (bc'), a' in a_1' an c.

Für die V s. Preisschrift II § 25 und Acta Math. l. c. Bei X erhält man aus den Involutionen n. 1. sechs Transformationen 5. Ordnung und aus den Involutionen n. 2. drei Homologieen. Es sind die Transformationen des Indexes 6 des § 1 vorhanden.

Theorem LVII. Die Abbildung von XV gibt die Gruppe über der Figur von Clebsch des § 1. Th. XV mit 120 Transformationen.

Uebereinstimmend mit den 5 Ebenen des Pentaeders existiren 5 Gruppen X und 5 ausgezeichnete Dreiecke unter den 15, welche über den 15 Seiten der 6 Punkte zu bilden sind. Die Gruppe ist holoedrisch isomorph mit der Totalgruppe M_4 (I. Theil § 4).

Man bemerkt auch, dass I eine Untergruppe von II und III.

Wir haben also das Resultat, dass unter den XII Gruppen der letzten Tafel vier nicht typisch sind, nämlich V, VII, XI, XII.

Um die Gruppen I, II, III zu studiren, mache ich die Abbildung ganz ausführlich für I, woraus jene von II und III folgt. Es sei $j = 0$ die Gleichung einer Wendetangente von L, dann kann L unter die Form $j_1 j_2 j_3 + l_{123}^3 = 0$ und die Fläche unter $x_4^3 + j_1 j_2 j_3 + l_{123}^3 = 0$ gesetzt werden. Wenn $j_1 \ldots j_9$ die Wendetangenten von L und l_{123}, l_{456}, l_{789} die Inflexionsgeraden eines vollständigen Tripels sind, sind die 27 Geraden

$$\begin{array}{l}
j_1 = 0,\ j_2 = 0,\ j_3 = 0 \text{ mit } x_4^3 + l_{123}^3 = 0 \\
j_4 = 0,\ j_5 = 0,\ j_6 = 0 \text{ mit } x_4^3 + l_{456}^3 = 0 \\
j_7 = 0,\ j_8 = 0,\ j_9 = 0 \text{ mit } x_4^3 + l_{789}^3 = 0
\end{array}$$

und die 9 dreifachen Tangentenebenen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, welche ich hier weiter aufschreibe, geben mit den 9 Ebenen $u_1 u_2 u_3$, $v_1 v_2 v_3$, $w_1 w_2 w_3$ als Schnitte die 27 Geraden.

$$\begin{array}{ll}
a_1 & m x_2 + n\varepsilon^2 x_3 - 2am'n'\varepsilon\, x_1 = 0 \\
a_2 & m x_2 + n\varepsilon\, x_3 - 2am'n'\varepsilon^2 x_1 = 0 \\
a_3 & m x_2 + n\, x_3 - 2am'n'\, x_1 = 0
\end{array}\Bigg\} \begin{array}{ccc}
x_4 + A x_1 = 0, & x_4 + \varepsilon A x_1 = 0, & x_4 + \varepsilon^2 A x_1 = 0 \\
u_3 & u_1 & u_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
b_1 & l x_1 + n\varepsilon^2 x_3 - 2an'l'\varepsilon\, x_2 = 0 \\
b_2 & l x_1 + n\varepsilon\, x_3 - 2an'l'\varepsilon^2 x_2 = 0 \\
b_3 & l x_1 + n\, x_3 - 2an'l'\, x_2 = 0
\end{array}\Bigg\} \begin{array}{ccc}
x_4 + B x_2 = 0, & x_4 + \varepsilon B x_2 = 0, & x_4 + \varepsilon^2 B x_2 = 0 \\
v_3 & v_1 & v_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
c_1 & l x_1 + m\varepsilon^2 x_2 - 2am'l'\varepsilon\, x_3 = 0 \\
c_2 & l x_1 + m\varepsilon\, x_2 - 2am'l'\varepsilon^2 x_3 = 0 \\
c_3 & l x_1 + m\, x_2 - 2am'l'\, x_3 = 0
\end{array}\Bigg\} \begin{array}{ccc}
x_4 + C x_3 = 0, & x_4 + \varepsilon C x_3 = 0, & x_4 + \varepsilon^2 C x_3 = 0 \\
w_3 & w_1 & w_2
\end{array}$$

Theorem LVIII. Die Geraden

$$\begin{array}{l}
c_1 w_1,\ c_2 w_3,\ c_3 w_2,\ a_1 u_1,\ a_2 u_2,\ a_3 u_3 \\
c_3 w_3,\ c_1 w_2,\ c_2 w_1,\ a_3 u_2,\ a_1 u_3,\ a_2 u_1
\end{array}$$

bilden eine Doppelsechs.

Indem man die Exponenten von ε in den Coefficienten von x_3 durch ϱ, σ, τ für a, b, c und durch ϱ', σ', τ' für u, v, w bezeichnet, schneiden sich zwei Geraden von b, c oder von c, a oder von a, b, wenn beziehungsweise

$$\sigma' - \sigma = \tau' - \tau, \quad \varrho' - \varrho = \tau' + \tau, \quad \varrho' + \varrho = \sigma' + \sigma.$$

Hieraus folgt:

Theorem LIX. Jedes Sextupel schneidet die Ebene $x_4 = 0$ in 6 Punkten, welche in zwei Inflexionsgeraden gelegen sind. Das conjugirte Sextupel schneidet in denselben 6 Punkten.

Die anderen 8 Sextupel desselben Inflexionstripels sind also:

$$\begin{array}{l|l}
c_1 w_1,\ c_2 w_3,\ c_3 w_2,\ a_3 u_1,\ a_2 u_3,\ a_1 u_2 & c_1 w_3,\ c_2 w_2,\ c_3 w_1,\ a_2 u_2,\ a_1 u_1,\ a_3 u_3 \\
c_2 w_2,\ c_3 w_1,\ c_1 w_3,\ a_1 u_3,\ a_3 u_2,\ a_2 u_1 & c_2 w_1,\ c_3 w_3,\ c_1 w_2,\ a_3 u_1,\ a_2 u_3,\ a_1 u_2 \\[6pt]
c_1 w_1,\ c_2 w_2,\ c_3 w_3,\ b_3 v_2,\ b_1 v_3,\ b_2 v_1 & c_1 w_1,\ c_2 w_2,\ c_3 w_3,\ b_2 v_3,\ b_3 v_1,\ b_1 v_2 \\
c_3 w_2,\ c_1 w_3,\ c_2 w_1,\ b_1 v_1,\ b_2 v_2,\ b_3 v_3 & c_2 w_3,\ c_3 w_1,\ c_1 w_2,\ b_1 v_1,\ b_2 v_2,\ b_3 v_3 \\[6pt]
c_1 w_2,\ c_2 w_3,\ c_3 w_1,\ b_3 v_2,\ b_1 v_3,\ b_2 v_1 & a_1 u_1,\ a_2 u_3,\ a_3 u_2,\ b_2 v_2,\ b_3 v_1,\ b_1 v_3 \\
c_2 w_1,\ c_3 w_2,\ c_1 w_3,\ b_2 v_3,\ b_3 v_1,\ b_1 v_2 & a_2 u_2,\ a_3 u_1,\ a_1 u_3,\ b_1 v_1,\ b_2 v_3,\ b_3 v_2 \\[6pt]
a_1 u_1,\ a_2 u_3,\ a_3 u_2,\ b_3 v_3,\ b_1 v_2,\ b_2 v_1 & a_2 u_2,\ a_3 u_1,\ a_1 u_3,\ b_3 v_3,\ b_1 v_2,\ b_2 v_1 \\
a_2 u_3,\ a_1 u_2,\ a_2 u_1,\ b_1 v_1,\ b_2 v_3,\ b_3 v_2 & a_3 u_3,\ a_1 u_2,\ a_2 u_1,\ b_2 v_2,\ b_3 v_1,\ b_1 v_3
\end{array}$$

Theorem LX. Es existiren 9 Doppelsechsen, welche keine Doppeldrei mit einer gegebenen Doppelsechs gemeinsam haben. Jede von ihnen hat zwei Geraden mit jedem Sextupel der gegebenen Doppelsechs gemeinsam.

Beweis. Es gibt in dem obigen Tableau 9 besondere Doppeldreien, welche sich zu 9 Doppelsechsen combiniren. Jede Doppeldrei bildet allgemein einen Theil von zwei Doppelsechsen. Eine Doppelsechs enthält 20 Doppeldreien und jede gibt Anlass zu einer anderen. Zwei dieser 20 Doppelsechsen sind schon geschrieben, die 18 übrigen mit den 9 besonderen geben 27. Es bleiben also 9 Sextupel des Theoremes.

Um die Transformationen in der Bildebene zu finden, muss man nun die Aenderung unter den Doppelsechsen verfolgen. Schreiben wir zuerst die Collineationen der Gruppe von F_3. Es sei $\varepsilon^3 = 1$:

$$J^{\omega}_{c_t}: x_1' = l'^2 x_2, \quad x_2' = m'^2 \varepsilon^t x_1, \quad x_3' = m' l' \varepsilon^{2t} x_3 \quad x_4' = x_4 m' l' \varepsilon^{\omega}$$

$$J^{\omega}_{b_s}: x_1' = l'^2 x_3, \quad x_2' = m' l' \varepsilon^{2s} x_2, \quad x_3' = n'^2 \varepsilon^s x_1 \quad x_4' = x_4 n' l' \varepsilon^{\omega}$$

$$J^{\omega}_{a_r}: x_1' = m' n' \varepsilon^r x_1, \quad x_2' = m'^2 x_3, \quad x_3' = n'^2 \varepsilon^r x_2 \quad x_4' = x_4 m' n' \varepsilon^{\omega}$$

$$D^{\omega}_1 \quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^{\omega} x_4, \qquad D^{\omega}_{\nu} \quad ml' x_2 : nm' \varepsilon^{\nu} x_3 : ln' \varepsilon^{2\nu} x_1 : \varepsilon^{2\omega} x_1.$$

Jetzt bleibt übrig, die Transformation der Doppelsechsen zu verfolgen. Die J^{ω}_a transformiren die Geraden $a_\varrho u_\varrho$ in $a_{-(\varrho+r)} u_{\varrho'+r-\omega}$ und geben also dieselbe Gerade nur für $r \equiv \varrho \equiv \omega$. Sie transformiren die Geraden $b_\sigma v_\sigma$ in $c_{\sigma-r} w_{\sigma'-\omega}$ und $c_\tau w_{\tau'}$ in $b_{\tau+r} w_{\tau'-r-\omega}$.

J^{ω}_b transformirt $b_\sigma v_{\sigma'}$ in $b_{s-\sigma} v_{\sigma'-\omega}$ und $a_\varrho u_{\varrho'}$ in $c_{-(s+\varrho)} w_{\varrho'-\omega}$, $c_\tau w_{\tau'}$ in $a_{\tau+s} u_{\tau'}$.

J^{ω}_c transformirt $c_\tau w_{\tau'}$ in $c_{\tau-t} w_{\tau'-t-\omega}$ und $a_\varrho u_{\varrho'}$ in $b_{\varrho-\tau} v_{\varrho'-\omega}$, $b_\sigma v_{\sigma'}$ in $a_{\sigma+t} u_{\sigma'+t-\omega}$

D^{ω}_1 transformirt $a_\varrho u_{\varrho'}$ in $a_{\varrho-1} u_{\varrho'-\omega}$, $b_\sigma v_{\sigma'}$ in $b_{\sigma+1} v_{\sigma'-\omega}$, $c_\tau w_{\tau'}$ in $c_{\tau-1} w_{\tau'-\omega}$

D^{ω}_ν transformirt $a_\varrho u_{\varrho'}$ in $b_{\varrho-\nu} v_{\varrho'-\omega}$, $b_\sigma v_{\sigma'}$ in $c_{\sigma+\nu} w_{\sigma'+\nu-\omega}$, $c_\tau w_{\tau'}$ in $a_{\tau-\nu} u_{\tau'-\nu-\omega}$.

Die Doppelsechs, welche wir für die Abbildung wählten, transformirt sich in die folgenden:

durch J^{ω}_a in $b_{r+1} v_{1-r-\omega}, b_{r+2} v_{3-r-\omega}, b_{r+3} v_{2r-\omega}, a_{-r-1} u_{1+r-\omega}, a_{-2-r} u_{2+r-\omega}, a_{-3-r} u_{+r-\omega}$
$b_{3+r} v_{3-r-\omega}, b_{r+1} v_{2-r-\omega}, b_{r+2} v_{1-r-\omega}, a_{-3-r} u_{2+r-\omega}, a_{-1-r} u_{3+r-\omega}, a_{-2-r} u_{1+r-\omega}$

durch J^{ω}_b in $a_{s+1} u_1, a_{s+2} u_3, a_{s+3} u_1, c_{-s-1} w_{1-\omega}, c_{-s-2} w_{2-\omega}, c_{-s-3} w_{3-\omega}$
$a_{s+3} u_3, a_{s+1} u_2, a_{s+2} u_1, c_{-3-s} w_{2-\omega}, c_{-1-s} w_{3-\omega}, c_{-2-s} w_{1-\omega}$

durch J^{ω}_c in $c_{1+t} w_{1+t-\omega}, c_{2+t} w_{2-t-\omega}, c_{3-t} w_{3-t-\omega}, b_{1-t} v_{1-\omega}, b_{2-t} v_{2-\omega}, b_{3-t} v_{3-\omega}$
$c^{3-t} w_{3-t-\omega}, c_{1-t} w_{2-t-\omega}, c_{2-t} w_{1-t-\omega}, b_{3-t} v_{2-\omega}, b_{1-t} v_{3-\omega}, b_{2-t} v_{1-\omega}$

durch D^{ω}_1 in $c_3 w_{1-\omega}, c_1 w_{3-\omega}, c_2 w_{2-\omega}, a_3 u_{1-\omega}, a_1 u_{2-\omega}, a_2 u_{3-\omega}$
$c_2 w_{3-\omega}, c_3 w_{2-\omega}, c_1 w_{1-\omega}, a_2 u_{2-\omega}, a_3 u_{3-\omega}, a_1 u_{1-\omega}$

durch D_ν^{ω} in $a_{1-\nu}u_{1-\nu-\omega},\ a_{2-\nu}u_{3-\nu-\omega},\ a_{3-\nu}u_{2-\nu-\omega},\ b_{1-\nu}v_{1-\omega},\ b_{2-\nu}v_{2-\omega},\ b_{3-\nu}v_{3-\omega}$

$a_{3-\nu}u_{3-\nu-\omega},\ a_{1-\nu}u_{2-\nu-\omega},\ a_{2-\nu}u_{1-\nu-\omega},\ b_{3-\nu}v_{4-\omega},\ b_{1-\nu}v_{3-\omega},\ b_{2-\nu}v_{1-\omega}$

und

durch $(J_a^{\omega})^{-1}$ in $b_{1-r}v_{1+r+\omega},\ b_{2-r}v_{3+r+\omega},\ b_{3-r}v_{2+r+\omega},\ a_{-1-r}u_{1-r+\omega},\ a_{-2-\nu}u_{2-r+\omega},\ a_{-3-r}u_{3-r+\omega}$

$b_{3-r}v_{3+r+\omega},\ b_{1-r}v_{2+r+\omega},\ b_{2-r}v_{1+r+\omega},\ a_{-3-r}u_{2-r+\omega},\ a_{-1-r}u_{3-r+\omega},\ a_{-2-r}u_{1-r+\omega}$

durch $(J_b^{\omega})^{-1}$ in $a_{s-1}u_1,\ a_{s-2}u_3,\ a_{s-3}u_1,\ c_{s-1}\ w_{1+\omega},\ c_{s-2}w_{2+\omega},\ c_{-s-3}w_{3+\omega}$

$a_{s-3}u_3,\ a_{s-1}u_2,\ a_{s-2}u_1,\ c_{-3+s}w_{2+\omega},\ c_{s-1}w_{3+\omega},\ c_{-2-s}w_{1+\omega}$

durch $(J_c^{\omega})^{-1}$ in $c_{1+t}w_{1+t+\omega},\ c_{2+t}w_{2+t+\omega},\ c_{3+t}w_{3+t+\omega},\ b_{1+t}v_{1+\omega},\ b_{2+t}v_{2+\omega},\ b_{3+t}v_{3+\omega}$

$c_{3+t}w_{3+t+\omega},\ c_{1+t}w_{2+t+\omega},\ c_{2+t}w_{1+t+\omega},\ b_{3+t}v_{2+\omega},\ b_{1+t}v_{3+\omega},\ b_{2+t}v_{1+\omega}$

durch $(D_1^{\omega})^{-1}$ in $c_2w_{1+\omega},\ c_3w_{3+\omega},\ c_1w_{2+\omega},\ a_2u_{1+\omega},\ a_3u_{2+\omega},\ a_1u_{3+\omega}$

$c_1w_{3+\omega},\ c_2w_{2+\omega},\ c_3w_{1+\omega},\ a_1u_{2+\omega},\ a_2u_{3+\omega},\ a_3u_{1+\omega}$

durch $(D_\nu^{\omega})^{-1}$ in $b_{1-\nu}v_{1+\omega-\nu},\ b_{2-\nu}v_{3+\omega-\nu},\ b_{2-\nu}v_{2+\omega-\nu},\ c_{1+\nu}w_{1+\nu+\omega},\ c_{2+\nu}w_{2+\nu+\omega},\ c_{3+\nu}w_{3+\nu+\omega}$

$b_{3-\nu}v_{3+\omega-\nu},\ b_{1-\nu}v_{2+\omega-\nu},\ b_{2-r}v_{1+\omega-\nu},\ c_{3+\nu}w_{2+\nu+\omega},\ c_{1+\nu}w_{3+\nu+\omega},\ c_{2+\nu}w_{1+\nu+\omega}.$

Durch diese letzteren 10 Aenderungen sind die Transformationen der gesuchten Gruppe *vollständig* ausgedrückt, indem man voraussetzt, dass die C_3, welche die Geraden der Ebene abbilden, nicht die Geraden des ersten Sextupels und zweimal jene des zweiten Sextupels schneiden.

Statt diese Bilder zu schreiben, bediene ich mich einer zweiten Methode, nämlich der Clebschischen Abbildung. Seien a_2n_2, a_3n_3 die zwei Directrixgeraden der windschiefen Projection, ein Punkt der Ebene $x_4 = 0$ sei ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ein Punkt der Fläche sei x_1, x_2, x_3, x_4. Dann gehen durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 die zwei Ebenen

1) $(mx_2 + nx_3 - 2am'n'x_1) - \alpha(x_4 + Ax_1) = 0$ oder $A - \alpha B_2 = 0$

2) $(mx_2 + n\varepsilon x_3 - 2am'n'\varepsilon^2 x_1) - \beta(x_4 + \varepsilon^2 Ax_1) = 0$ oder $A - \beta B_3 = 0$

3) $$\alpha = \frac{m\xi_2 + n\xi_3 - 2am'n'\xi_1}{A\xi_1}, \quad \beta = \frac{m\xi_2 + n\varepsilon\xi_3 - 2am'n'\varepsilon^2\xi_1}{A\varepsilon^2\xi_1}$$

$$m\frac{\xi_2}{\xi_1} + n\frac{\xi_3}{\xi_1} - 2am'n' = A\frac{A_2}{B_2}, \quad m\frac{\xi_2}{\xi_1} + n\varepsilon\frac{\xi_3}{\xi_1} - 2am'n'\varepsilon^2 = A\frac{A_3}{B_3}$$

$$n(\varepsilon - 1)\frac{\xi_3}{\xi_1} - 2am'n'(\varepsilon^2 - 1) = A\frac{A_3}{B_3} - A\frac{A_2}{B_2},$$

$$m(\varepsilon - 1)\frac{\xi_2}{\xi_3} - 2am'n'(\varepsilon - \varepsilon^2) = A\varepsilon\frac{A_2}{B_2} - A\frac{A_3}{B_3}$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = -2\frac{am'n'}{n}\varepsilon^2 + A\frac{A_3B_2 - A_2B_3}{nB_2B_3(\varepsilon - 1)}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = -\frac{2am'n'}{m}\varepsilon + A\frac{\varepsilon A_2B_3 - A_3B_2}{mB_2B_3(\varepsilon - 1)}$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = mn\, B_2 B_3 (\varepsilon - 1) : \left(-2am'\varepsilon B_2 B_3 (\varepsilon - 1) + A\,(\varepsilon A_2 B_2 - A_3 B_2)\, n\right)$$
$$: \left(-2an'\varepsilon^2 A_2 A_3 (\varepsilon - 1) + mA\,(A_3 B_2 - A_2 B_3)\right)$$

Andererseits ist

$$n(1-\varepsilon)x_3 - 2am'n'(1-\varepsilon^2)x_1 - (\alpha-\beta)x_4 - A(\alpha - \varepsilon^2\beta)x_1 = 0$$

und bemerken wir, dass die Verhältnisse 1) 2) multiplicirt unter einander und mit

$$(mx_2 + n\varepsilon^2 x_3 - 2am'n'\varepsilon x_1) = -\frac{1}{\alpha\beta}(x_4 + \varepsilon A x_1)$$

gerade $x_4^3 + L_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ geben. Also

$$n(1-\varepsilon^2)x_3 - 2am'n'(1-\varepsilon)x_1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha\beta}\right)x_4 - A\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}\right)x_1 = 0$$

$$6am'n'\varepsilon x_1 - \left(\varepsilon^2\alpha - \beta\varepsilon^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha\beta}\right)x_4 - A\left(\alpha\varepsilon^2 - \varepsilon\beta + \alpha + \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}\right)x_1 = 0$$

woraus $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ zur Vollendung der Abbildung gerechnet werden.

Um zu vereinfachen, kann man eine quadratische Transformation anwenden

$$l\xi_1 = \frac{\lambda}{\xi_1'},\ l\xi_1 + m\xi_2 + n\xi_3 = \frac{\mu}{\xi_2'},\ l\xi_1 + m\xi_2 + n\varepsilon\xi_3 = \frac{\nu}{\xi_3'}$$

deren Resultat ich hier nicht aufschreiben will.

Am einfachsten vollzieht sich die Bestimmung der x_1, x_2, x_3, x_4 durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch die Bemerkung, dass

$$(mx_2 + nx_3 - 2am'n'x_1)(mx_2 + n\varepsilon x_3 - 2am'n'\varepsilon^2 x_3)(mx_2 + n\varepsilon^2 x_3 - 2am'n'\varepsilon x_3) -$$
$$-(x_4 + Ax_1)(x_4 + \varepsilon A x_1)(x_4 + \varepsilon^2 A x_1) = F_3.$$

Da die Bestimmung mittelst $F_3 = 0$ statt haben muss, wird man gleichzeitig die Gleichungen

$$mx_2 + nx_3 - 2am'n'x_1 = \alpha(x_4 + Ax_1)$$
$$mx_2 + n\varepsilon x_3 - 2am'n'\varepsilon^2 x_1 = \beta(x_4 + \varepsilon A x_1)$$
$$mx_2 + n\varepsilon^2 x_3 - 2am'n'\varepsilon\, x_1 = -\frac{1}{\alpha\beta}(x_4 + \varepsilon^2 A x_1)$$

setzen können. Hieraus durch Multiplication mit passenden Factoren

$$3m\frac{x_2}{x_1} = \left(\alpha + \ \ \beta - \frac{1}{\alpha\beta}\right) + A\left(\alpha + \varepsilon^2\beta - \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}\right)\frac{x_1}{x_4}$$

$$3m\frac{x_3}{x_1} = \left(\alpha + \varepsilon^2\beta - \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}\right) + A\left(\alpha + \varepsilon\,\beta - \frac{\varepsilon^2}{\alpha\beta}\right)\frac{x_1}{x_4}$$

und daher

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$

$$1)' \quad -\left(\alpha + \beta\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\alpha\beta}\right)mn : \left[-A\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \alpha\beta\right) + 2\,am'n'\left(\alpha + \beta - \frac{1}{\alpha\beta}\right)\right]n :$$

$$: \left[A\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \varepsilon\alpha\beta\right) + 2am'n'\left(\alpha + \varepsilon^2\beta - \frac{\varepsilon}{\alpha\beta}\right)\right]m : \left[6am'n' + A\left(\alpha + \beta - \frac{1}{\alpha\beta}\right)\right]mn$$

wo α, β die Werthe aus 3) haben.

Die reciproken Formeln werden

$$2)' \quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = [(lmn + 2a\varepsilon^2)B_3 + Anm\,A_3][(lmn + 2n)B_2 + Amn\,A_2] :$$
$$: [(lmn + 2a\varepsilon^2)B_3 + Aam\,A_3]B_2 : [(lmn + 2a)B_2 + Anm\,A_2]B_3$$

Corollar. Die cubischen Formen der Formeln 1)′ sind zu Null gemacht durch

$$a_1\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0 \qquad b_1\ \xi_2 = 0,\ \xi_1 - (1 + 2\,am'n'\varepsilon^2)\xi_3 = 0$$
$$a_2\ \xi_1 = 0,\ \xi_3 = 0 \qquad b_2\ \xi_3 = 0,\ \xi_1 - (1 + 2\,am'n')\ \ \xi_2 = 0$$
$$a_3\ \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \varepsilon - 1 : 1 : 1$$
$$b_3\ \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \varepsilon^2 - 1 : 1 : 1$$

Denn die biquadratischen Formen in ξ sind doppelt befriedigt durch

$$\xi_1 = 0,\ m\xi_2 + n\varepsilon\xi_3 = 0 \text{ und } \xi_1 = 0,\ m\xi_2 + n\xi_3 = 0$$

und einfach (wegen der Contacte) durch

$$\xi_1 = 0,\ m\xi_2 + n\varepsilon\xi_3 = 0; \qquad \xi_3 = 0,\ l\xi_1 + m\xi_2 \ \ = 0$$
$$\xi_1 = 0,\ m\xi_2 + \ n\xi_3 = 0; \qquad \xi_3 = 0,\ l\xi_1 + m\varepsilon^2\xi_2 = 0$$
$$\xi_3 = 0,\ l\xi_1 + m\varepsilon\,\xi_2 = 0.$$

Theorem LXI. Die zwei Tripel $a_1 a_2 a_3$ und $b_1 b_2 b_3$ sind dreifach perspectiv.

Die eine Perspectivität ist ersichtlich, weil die zwei Contacte sich in Durchgänge über $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\xi_3$ verwandeln und $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ mit den zwei festen Scheiteln alineirt ist. Die anderen folgen daraus mittelst der Eigenschaften der Wendepunkte.

Lemma. Man kann ein Netz von Ebenen eindeutig den Punkten einer cubischen Fläche entsprechen machen, sodass Incidenz stattfindet; und zwar auf unendlich viele Arten.

Dies folgt aus der Construction der F_3 durch drei collineare Ebenenbündel.

Theorem LXII. Die Ebenen, welche die 6 Geraden eines Sextupels von F_3 mit einem beliebigen Punkte derselben verbinden, schneiden eine Ebene des Raumes in 6 Geraden einer Configuration, welche die Gruppe I von Transformationen tragen kann.

Denn alle Netze sind in collinearer Lage unter einander und in eindeutiger Incidenzlage mit F_3.

Theorem LXIII. Die Einhüllende Φ_3 der Ebenen, welche F_3 in äquianharmonischen Curven schneiden, ist $u_4^3 + \varDelta(u_1, u_2, u_3) = 0$, wo $\varDelta$ die Cayleysche Curve von $L(x_1, x_2, x_3)$. [Beweis in Note IV. a. E. des Buches.]

Es existiren also 27 Büschel von Ebenen, welche alle die F_3 in C_e schneiden. Von keinem dieser Büschel fällt i. A. die Axe in die Ebene $x_4 = 0$.

Theorem LXIV. Die 36 Quadriflächen, in Bezug auf welche die 36 Doppelsechsen ihre eigenen conjugirten sind, schneiden die Ebene $x_4 = 0$ in den 12 Seitenpaaren der Wendedreiecke und enthalten die Verbindungsgeraden der Gegenecken mit X_4.

Für die Gruppe II fügen sich die folgenden Collineationen hinzu, welche F_3 ungeändert lassen

$$\begin{aligned} lx_1' - m\varepsilon^\nu x_2' &= i\,(lx_1 - m\varepsilon^\nu x_2) \\ lx_1' + m\varepsilon^\nu x_2' + 2\,am'l'x_3' &= -(lx_1 + m\varepsilon^\nu x_2 + 2am'l'x_3) \\ l^2x_1' + mlx_2' + 2x_3'(nl - am') &= l^2x_1 + mlx_2 + 2\,x_3\,(nl - am) \\ x_4' &= \varepsilon^\omega x_4 \end{aligned}$$

und die Transpositionen durch D_ν^ω und J^ω.

Es ist sehr leicht zu beweisen, dass wenn man die Configuration der 9 Wendepunkte mittelst einer quadratischen Transposition überträgt, welche sich dreier Wendepunkte bedient, man zwei Tangentialtripel erhält. Also die 6 Punkte sind in diesem Falle zwei Tangentialtripel einer harmoniscuen C_3.

Theorem LXV. Die Fläche $\sum\limits_1^4 x_i^3 = 0$ hat die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = {} & (\varepsilon^2 - \varepsilon)\,\xi_3\xi_4(\varepsilon\xi_4 - \xi_3) + \varepsilon\,(\xi_4 - \xi_3)\,\xi_2^2 + (\xi_4 + \varepsilon\xi_3)\,\xi_2^2 : \\ & : (\varepsilon^2 - \varepsilon)\,\xi_3\xi_4\,(\varepsilon^2\xi_4 - \xi_3) - (\varepsilon^2\xi_4 - \xi_3)^2\,\xi_2 + (\xi_4 + \xi_3)\,\xi_2^2 : \\ & : (\varepsilon^2 - \varepsilon)\,\xi_3\xi_4\,(\xi_3 - \xi_4) + (\varepsilon\xi_4 + \xi_3 - \xi_2)^2\,\xi_2 + 2\varepsilon\,\xi_3\xi_4\xi_2 \\ & : (\varepsilon^2 - \varepsilon)\,\xi_3\xi_4\,(\xi_3 - \varepsilon^2\xi_4) - \varepsilon\,(\varepsilon\xi_4 + \xi_3 - \xi_2)^2\,\xi_2 - 2\,\varepsilon^2\xi_2\xi_3\xi_4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = {} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_3 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_4) : (x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_4) \\ & : (x_1 + \varepsilon x_2)\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

Beweis. Die Directricen sind

$$x_3+x_4 = 0, \qquad x_1+x_2 = 0$$
$$x_3+\varepsilon x_4 = 0, \qquad x_1+\varepsilon x_2 = 0$$

die Bildebene ist $x_1 = 0$ und die Transversalgeraden sind

$$x_3+x_4 = \frac{\xi_3+\xi_4}{\xi_2}(x_1+x_2) \qquad \frac{\xi_3+\xi_4}{\xi_2} = \alpha$$

$$x_3+\varepsilon x_4 = \frac{\xi_3+\varepsilon\xi_4}{\xi_2}(x_1+\varepsilon x_2) \qquad \frac{\xi_3+\varepsilon\xi_4}{\xi_2} = \beta$$

$$x_3+\varepsilon^2 x_4 = -\alpha\beta\,(x_1+\varepsilon^2 x_2),\ f_1 = \frac{x_1+x_3}{x_1+\varepsilon x_2} - \frac{x_3+x_4}{x_3+\varepsilon x_4},\ f_2 = \frac{x_3+x_4}{x_3+\varepsilon x_4} - \varepsilon\frac{x_1+x_2}{x_1+\varepsilon x_2}$$

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = (\varepsilon f_1 + f_2)\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4} : \varepsilon f_1 : f_2 \text{ oder}$$

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = (x_1+x_2)(x_1+\varepsilon x_2) : \varepsilon(x_2x_3 - x_1x_4) : (x_1x_3 - \varepsilon^2 x_1x_4 + \varepsilon x_2x_4)$$

$$x_1:x_2:x_3:x_4 = \left[-\varepsilon\alpha-\beta+\frac{\varepsilon^2}{\alpha\beta}\right] : \left[\varepsilon\alpha+\varepsilon^2\beta-\frac{1}{\alpha\beta}\right] : \left[-\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\varepsilon^2\alpha\beta\right] : \left[\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{\varepsilon^2}{\beta}-\alpha\beta\right].$$

Diese Abbildung ist verwandelt in eine andere mittelst einer quadratischen Transformation mit den Fundamentalpunkten

$$\xi_2 = 0 \qquad \xi_2 = 0 \qquad \xi_3 = 0$$
$$\xi_3+\xi_4 = 0 \qquad \xi_3+\varepsilon\xi_4 = 0 \qquad \xi_2+\xi_4 = 0$$

und den Formeln

$$\xi_2 = \frac{1}{\xi_2'},\quad \xi_2+\xi_3+\xi_4 = \frac{1}{\xi_3'},\quad \varepsilon\xi_2+\xi_3+\varepsilon\xi_4 = \frac{1}{\xi_4'}$$

und das Resultat ist jenes des Theoremes.

Die 6 gemeinsamen Punkte der Abbildungscurven sind

p_1	0	0	1	p_4	ε	0	1
p_2	0	1	0	p_5	$\varepsilon-1$	ε	1
p_3	1	1	0	p_6	$1-\varepsilon$	1	ε^2.

Theorem LXVI. Diese 6 Punkte bilden zwei 6fach perspective Tripel $p_1p_2p_5$ und $p_3p_4p_6$.

Man beweist es, indem man die Polaren von p_3, p_4, p_6 bezüglich der zerfallenden Curve C_3 $p_1p_2+p_2p_5+p_1p_5$ nimmt, welche in der That die Geraden p_4p_6, p_3p_6, p_3p_4 werden.

Theorem LXVII. Die Anzahl der Collineationen der Gruppe III und daher der Transformationen der Gruppe I des § 1 ist 648.

Beweis. Es gibt 18 involutorische Homologieen mit Bezug auf die 18 convergenten Geradentripel; es gibt 27 Collineationen der Form 2, weil jede Gerade zwei solchen Tripeln angehört; 6 der Form 4, welche die drei Gegenkantenpaare als Directrixpaare besitzen, 84 von 5 entsprechend den 6 Tetraederkanten und den 4. 9 anderen Inflexionsgeraden in den Ebenen X_i; 162 von 7. entsprechend den 6 Vertauschungen des Indexes 4 und den 27 Factoren 1, ε, ε^2, welche den 3 Variabeln beizulegen sind; 72 der Form 8 entsprechend den 4 Curven in X_1, X_2, X_3, X_4 und den 9 Inflexionspunkten als Centren der Involution, welche in B_6 eintritt; 36 von 9. gehörend zu den Tripeln alineirter Centren auf den Tetraederkanten und zu den gegenüberliegenden Centren; 36 von 10. entsprechend den drei Gegenkantenpaaren und den 6 dazu gehörigen Involutionen; 54 von 11. bezüglich auf die 27 Geraden von F_3; 144 von 13., weil in jeder Ebene X_i die Curve C_e 6 Tangentialcyclen bezüglich auf das Hessesche Dreieck besitzt und jeder Cyclus 6 Transformationen liefert.

2. Beweis. Man kann die Ebenen X_i unter einander auf 24 Arten und eine beliebige Gerade 9 anderen und eine Berührungsebene durch die Gerade, welche frei ist, drei Ebenen durch die entsprechende Gerade entsprechen machen, also $24 \cdot 9 \cdot 3$.

Corollar. Dieselbe Zahl von Transformationen ist in der ebenen Gruppe über zwei sechsfach perspectiven Dreiecken (p. 59) enthalten.

Wenn man drei Geraden über $X_1 X_2$ und $X_3 X_4$ und drei über $X_1 X_3$ und $X_2 X_4$ in ein Sextupel nimmt, so liefern die drei Centra auf $X_1 X_4$ und die drei auf $X_2 X_3$ die 6 Homologieen der 6 Abbildungspunkte.

Theorem LXVIII. Die Anzahl der Collineationen der Gruppe II und daher jene der Transformationen der Gruppe II des § 1 ist 108.

Beweis. Es gibt 9 involutorische Homologieen der Form 1., 2 der Form 3., 24 der Form 5 entsprechend den 12 Inflexionsgeraden in der Ebene $X_4 = 0$, 18 der Form 6 gemäss den 9 Wendepunkten der Curve $X_4 = 0$, 18 der Form 8, 36 der Form 14 und die Identität. Ebenso zählt man:

Theorem LXIX. Die Anzahl der Collineationen der Gruppe I und daher jene der Transformationen der Gruppe III des § 1 ist 54.

Durch Zusammenfassung erhalten wir nun das Resultat über die Gruppen M_6 und ihre Ordnungen r:

Theorem LXX. Die sämmtlichen existirenden typischen Gruppen von Transformationen mit 6 Punkten in der Characteristik sind:

I. *Die Gruppe über zwei syzygetischen Tangentialtripeln einer willkürlichen Curve 3. Ordnung d. h. über* B_6 $r = 54.$

II. *Die Gruppe über zwei syzygetischen Tangentialtripeln einer harmonischen Curve 3. Ordnung d. h. über* B_{12} $r = 108.$

III. *Die Gruppe über zwei syzygetischen Tangentialtripeln einer äquianharmonischen Curve 3. Ordnung (oder die äquivalente über* B_9*)* $r = 648.$

IV. *Die Gruppe über* Γ_6 $r = 12.$

V. *Die Gruppe über dem Clebschischen Sechseck* $r = 120.$

VI. *Die Gruppe über zwei dreifach perspectiven Dreiecken* $r = 12.$

VII. *Die Gruppe über einem cyclischen Quadrupel und einem involutorischen Paare einer Collineation* $r = 8.$

VIII. *Die Gruppe über dem sechsfach Brianchonschen Sechseck* $r = 24.$

§ 5. Die typischen Gruppen von M_7 mittelst ihrer geometrischen Figuren.

1. Alle Transformationen, welche über 7 Punkte verlegt werden können, sind: 1. B_6 mit Doppelpunkt, 2. Δ_3 mit Doppelpunkt, 3. B_9 mit Doppelpunkt, 4. B_{12} mit Doppelpunkt, 5. a' in a, b' in b, c' in c mit Doppelpunkt, 6. Γ_6 mit Doppelpunkt, 7. B'_{12}, 8. B_{14}, 9. B_{18}, 10. Γ''_6, 11. Γ'_6, 12. Δ_6, 13. E_4, 14. Θ_2, ausserdem die cyclischen Collineationen und die orthanallagmatischen Transformationen.

Theorem LXXI. Eine Gruppe von 7 Punkten, wo die 7 Punkte unter einander Alineationen oder conconische oder unendlich nahe Lage haben, ist reductibel durch birationale Transposition auf eine Gruppe mit weniger als 7 Punkten oder auf eine orthanallagmatische Gruppe.

Beweis. Eine einzige Alineation $a_1 a_2 a_3$ reducirt die Jacobische Curve D_6 auf D_5 mit 4 Doppelpunkten und diese D_5 erlaubt Transposition in eine Quartik mit Doppelpunkt, die Gruppe jener in eine orthanallagmatische Gruppe. Die Alineationen $a_1 a_2 a_3$ und $a_4 a_5 a_6$ reduciren sofort auf eine Gruppe mit invariantiver $C_4 a^2$. Die Alineationen $a_1 a_2 a_3$ und $a_1 a_4 a_5$ geben eine invariantive C_3, welche nur durch 6 Punkte geht, also Reduction auf M_6, ebenso 3 beliebige Alineationen. Für $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^2$ hat man D_4 mit Doppelpunkt und orthanallagmatische Gruppe u. s. w. und für zwei unendlich nahe Punkte überträgt man in den Fall der Alineation. Hieraus folgt:

Theorem LXXII. Die folgenden Transformationen können nicht in eine irreductible Gruppe M_7 eintreten: (ab'), (ba'), (cc') und Qua-

drupel; a' in a, b' in b, c' in c und Doppelpunkt; (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in c.

2. Die einzigen Collineationen, welche man auf 7 Punkte ohne jene besonderen Lagen verlegen kann, sind: 1. Zwei cyclische Tripel und 1 Doppelpunkt, 2. ein cyclisches Sextupel.

Theorem LXXIII. Wenn eine Transformation 8. Grades mit 7 dreifachen Punkten in Coincidenz existirt mit einer gewissen Directrixsubstitution, muss diese Substitution immer als Collineation in der Ebene wirklich existiren 1).

Beweis. Die Transformation $\Theta_2(c_i \gamma_i)$ existirt immer, man wird also eine Transformation $(c_i \gamma_k)$ zusammensetzen können mit Θ_2 und man wird eine ebene Collineation erhalten.

3. Theorem LXXIV. Die Transformation B_{18} tritt in keine weitere Gruppe ein.

Beweis. Die Configuration der C_3 zeigt, dass die Transformation keine absolute Invariante besitzt und dass die cubische Curve $C_1 + C_2$ einzig ist. Sie muss also invariantiv durch die Gruppe sein und daher auch das durch C_3^3 und C_e gebildete Büschel. Im Büschel sind C_3^3, C_e einzig und müssen also ebenfalls invariant sein. Die Configuration der C_3 bestimmt die Transformation, welche daher einzig ist.

Lemma. Durch einen Cyclus einer ebenen Collineation vom Index 7 gehen drei C_3^3, welche die Spitzen in den drei Doppelpunkten haben. Für den Beweis cf. l. c. I § 4.

Theorem LXXV. Ueber den 7 Punkten eines ebenen collinearen Cyclus existirt eine Gruppe von 336 Transformationen.

Beweis. Die Jacobische Curve D_6 des Netzes von C_3 gestattet drei Wendepunkte, welche successive ihre Tangentialpunkte sind. Ich habe dies für die Collineation vom Indexe 7 und aber auch direct für B_{14} bewiesen, indem ich zeigte, dass die C_3^3 sich in den Rückkehrpunkten d_2, d_3, d_4 berühren. Die D_6 ist also das eindeutige Abbild einer Curve $C_4 p = 3$ mit 168 linearen Substitutionen. Hieraus folgen dann die 336 Transformationen nach Acta Math. 1895, II. Theil § 2, indem 7 unabhängige Doppeltangenten der C_4 als Basis eines Netzes von C_3 und die C_4 als Uebergangscurve der zugehörigen (1, 2) deutigen Transformation angenommen werden.

5. Theorem LXXVI. Die allgemeinste Transformation $[(ab), (a_i b_i), i = 1 \dots 4]^3$ mit $d_1 d_2$, und Θ_2 gibt eine zu (aa'), (bb'), (cc')

---

1) Die zwei Transformationen, welche so existiren, sind äquivalent mit B_{14} und mit Γ'_6, nämlich b in a_1, b_1 in a, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$.

äquivalente Transformation mit zwei involutorischen Paaren und bildet so eine vollständige Gruppe.

Beweis. $d_1 d_2$ können derart gewählt werden, dass keine andere Transformation existirt. Für $T_2 \cdot \Theta_2$ verificirt man die Ordnung 6 und die Zahl 4 der uneigentlichen Doppelpunkte, also $m - \nu = 2$.

6. Theorem LXXVII. $\varDelta_3$, d_1 liefert in seiner allgemeinsten Form mit Θ_2 eine vollständige cyclische Gruppe, Γ''_6.

Wenn man d_1 willkürlich nimmt, ist es unmöglich, auf die 7 Punkte irgend eine andere constructible Characteristik zu verlegen.

Theorem LXXVIII. B_6 in seiner allgemeinsten Form mit d_1 liefert mit Θ_2 eine vollständige Gruppe, welche noch $\varDelta_6$ enthält.

Die 7 Punkte ordnen sich weder zu einer anderen $\varDelta_3$, noch zu einer der anderen typischen Transformationen und d_1 kann niemals ein Doppelpunkt der Collineation sein, welche die Tripeln abc, $a'b'c'$ in sich überführt.

Theorem LXXIX. Die Figur der Transformation (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in b, c' in c erlaubt immer auch die Transformation (AB'), A' in A'_1 in C, C' in C'_1 in B und zwar derart, dass (aA), $(a'A')$, $(a'_1 C')$, $a'_2 C)$, (bB), $(c'A'_1)$, (cC'_1) coincidiren. Die zwei Transformationen sind permutabel.

Die 1. Transformation ist äquivalent B_{12} und mittelst der l. c. gegebenen Parameter constatirt man die Identität der Punktgruppen auf der invarianten C_e.

Durch die Parameter wird auch bewiesen, dass die Punktepaare $a'_1 c'$, $a'_2 c$, $a[a]$, $a'b$ jedes den Abstand $\frac{C}{2}$ haben. Die übrigen zwei Paare, welche mit $a'_1 c$ und $a'_2 c$ contangential sind, seien $[a'_1][c']$ und $[a'_2][c]$.

Die 6 Geraden durch $[a]$, welche die Covariante T des Quadrupels der Tangenten durch $[a]$ bilden, schneiden C_e in 6 Paaren, deren jedes auf den C_3 des Büschels Involutionen $u' - u$ und $u' + u$ bestimmen, also 12 Involutionen der Ebene. Einen analytischen Beweis für die Existenz dieser Untergruppe bringt der nächste Paragraph.

Theorem LXXX. Die involutorische Transformation, welche aus dem Paare $a[a]$ herstammt, ist vom 4. Grade und orthanallagmatisch und besitzt unter den Graden von a eine quadratische Involution.

1. Beweis. Das Büschel enthält drei Alineationen $[a]a'b$, $[a]a'_1c'$, $[a]a'_2c$. Der Punkt a' entspricht dem Punkte b zweimal wegen der Berührung in $[a]$, aber indem man $[a]a$ kreuzweise mit b, a' verbindet, findet man, dass dies auf den C_3 geschieht, welche tangirend an ba, $a'a$ in b, a' sind. Das ist hier eine und dieselbe C_3. Also die

Fundamentalgerade von b geht einfach durch a' und die Fundamentalgerade von a' einfach durch b. Ebenso gehen die Fundamentalgeraden von a'_1, a'_2 einfach durch c', c, weil eine einzige C_3 des Büschels $c'a$ oder ca in c' oder c berührt. Dies beweist, dass jeder der 6 Punkte nur eine Fundamentalgerade hat, welche durch a und den gemäss der Alineation mit $[a]$ gepaarten Punkt geht.

2. Beweis. Man überträgt das Büschel durch eine quadratische Transformation $b a'_1 a$ und erhält eine Basis mit einem vollständigen Vierseite. Aber die Transformation, welche auf jeder C_3 dieses Büschels die durch dieses Vierseit bestimmte involutorische Correspondenz besitzt, ist quadratisch und hat das Tripel der anderen drei Scheitel als Haupttripel. Diese drei anderen Scheitel sind die Transformirten von $[a]c$ und A [1]). Die Rücktransposition liefert also eine biquadratische Transformation $a^3 a'_1 a'_2 a'b c'c$.

3. Beweis. Auf jeder C_3 des Büschels befinden sich unendlich viele Vierseite, welche $[a]a$ zu zwei Gegenscheiteln haben. Die durch Geraden g durch $[a]$ ausgeschnittenen Paare sind von a aus neuerdings in mit $[a]$ in Geraden h alineirte Paare projicirt. Durch eine Gerade h [g fest vorausgesetzt] sind zwei C_3 vorgeschrieben. Indem man so das Büschel der h mit den Paaren durch a schneidet, wird man eine C_5 erhalten, welche sich in $[a]a$ und eine biquadratische Curve der beschriebenen Art zerlegt.

Theorem LXXXI. Die fünf anderen involutorischen Transformationen sind von der 6. und 5. Ordnung.

Beweis. $a'b$ ist ein zweites Paar mit der Distanz $\frac{C}{2}$. Die C_3 seines Büschels berühren sich in $a'b$. Man nimmt eine Transformation $(a'bc')^2$ und wird als Theil der neuen Basis neuerdings ein vollständiges Vierseit erhalten und daher eine Q^2, $(A'_1 A'_2 C)^2$, also durch die Rücktransposition eine Transformation $Q^6(c'^2 a'^2_1 a'^2_2 c^2 aa'^3 b^3)$, wo a', b kreuzweise gepaart sind. Ebenso

$$\begin{cases} a'^3_1 c'^3 a c^2 \;\; a'^2_2 a'^2 b^2 \\ c'^3 a'^3_1 a a'^2_2 c^2 \;\; b^2 \;\; a'^2 \end{cases} \text{und} \quad \begin{cases} a'^3_2 c^3 \;\; a c'^2 a'^2_1 a'^2 b^2 \\ c^3 \;\; a'^3_2 a a'^2_1 c'^2 b^2 \;\; a'^2 \end{cases}$$

für die zwei anderen Paare $a'_1 c'$ und $a'_2 c$.

Endlich liefern die zwei Paare $[a'_1][c']$ und $[a'_2][c]$ direct Q^2, welche $a' a'_2 c$ und $ba'_1 c'$ als Haupttripel haben. Denn die Punkte, welche jedesmal fehlen, bilden ein vollständiges Vierseit, welches dieselbe involutorische Correspondenz bestimmt; also

1) Mit grossen Buchstaben bezeichne ich bei einer Transposition die den kleinen Buchstaben der ersten Ebene entsprechenden Punkte oder Hauptpunkte der zweiten Ebene.

$$\begin{matrix} a_1'[a_1']a & bc'[a_1'] \\ c'[c']a & ba_1'[c'] \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_2'[a_2']a & a'c\,[a_2'] \\ c\,[c]\,a & a'a_2'[c]. \end{matrix}$$

Corollar I. Die Zusammensetzung der 6 involutorischen Transformationen mit der inhärenten Involution Θ_2 der 7 Punkte liefert die Involutionen T_5: $a'^2 b^2$, $a_1'^2 c^2$, $a_2'^2 c^2$; T_3: $c' a_1'$, $a_2' c$, a^2; T_3: $a_2' c$, $a'b$, a^2; T_3: $a_1' c'$, $a'b$, a^2; T_7: $a^3 b^3 a_1'^3 c'^3 a'^2 a_2'^2 c^2$; T_7: $a^3 a_2'^3 c^3 a'^3 b^2 a_1'^2 c'^2$, wo die paarweise stehenden Punkte kreuzweise coordinirt sind.

Corollar II. Die 6 neuen Transformationen bringen auf C_e die drei Correspondenzen $u' + u \equiv \gamma$ hervor, deren Centren a', b, a sind.

Corollar III. Die Untergruppe der 16 involutorischen Transformationen existirt auch, wenn die C_3 willkürlich ist und ist dann eine vollständige Gruppe (cf. n. 12. in CII). Die 7. Involution producirt in C_3 die Correspondenz, welche $a[a]$ als Centrum hat.

Theorem LXXXII. Die drei anderen cyclischen Gruppen der Ordnung 12, welche mit B_{12} äquivalent sind und in der Gruppe des Th. LXXIX vorkommen, sind von den Graden 6 und 5.

Beweis. Die Transposition von T_{12} durch $(a^3 ba' a_1' c' a_2' c)^4$ gibt: Gerade in $(b^2 a_1' a_2' c' a')^3$ in $(a_2'^3 a^3 c^2 c'^2 b^2 a_1'^2 a')^6$ und andererseits Grade in C_4 in $(a'^2 a_1' a_2' bc)^3$ in $(a_1'^3 a^3 ba_2'^2 a'^2 c'^2 c^2)$ | überdies a in $a^2 bcc' a' a_1' a_2'$ in $ba_2' c' a_1' a'$ in $(aa_1' a' c' cba_2'^2)^3$ | dann a in $a^2 bc c' a' a_1' a_2'$ in $a' c a_1' a_2' b$ in $a_1'^2 abc' ca' a_2'$ | dann c in aa_2' in ba_1' in $acc' b' a_2'$ | dann c' in $a_1' a$ in ba' in $acc' a_1' a_2'$ | dann a_2' in ac in bc' in $acb a_1' a_2'$ | dann a' in ab in c' in aa_1' | b in aa' in $a'a_1'$ in $abc' a_2' c$. Die Characteristik ist also

$$(c_1 \gamma_2),\ (c_2 \beta_1),\ (b_1 \beta_2),\ (b_2 \delta_1),\ (b_3 \gamma_1),\ (b_4 \beta_3).$$

Für die zwei anderen Transformationen des Indexes 12 bedarf es keiner involutorischen Transformationen mehr. Man setzt einfach die eben erhaltene Transformation mit einer quadratischen Transformation $(a' b' c)^2$ zusammen und wird erhalten $(a' b' c')^2$ in $(a^3 a_2'^2 c^2 c' b^2 a_1' a')$ in $(b^3 a_1'^2 a_2'^2 c'^2 aca')$ und andererseits $(a' b' c')^2$ in $(a^3 a_2'^3 c^2 c'^2 a_1'^2 a'^2 b)^6$ in $(a_1'^3 a'^2 b^2 c'^2 a_2' ac)^5$ und dann a in $b'c'$ in ab in $ba_2' (\Sigma_2)$, a in $b'c'$ in aa_2' in $ba_1' (\Sigma_1)$, c in $a'b'$ in ca in $bc' (\Sigma_2)$, c in $a'b'$ in $acc' a' a_2'$ in $c'a_1' (\Sigma_1)$. Und die 4. ist die Transposition von T_{12} durch abc, also $(abc)^2$ in $(a^3 a_1'^3 a_2'^2 c'^2 b^2 c^2 a')^6$ in $(a_2'^3 b^2 a'^2 c^2 b' c' a_1' a_2')^5$ und andererseits $(abc)^2$ in $(a^3 a_1'^2 c'^2 a'^2 ba_2' c)^5$ in $(a'^3 a_1'^2 a_2'^2 c^2 bb' c')^5$ und dann b' in ac in aa_1' in $a'a_2'$ (Σ_2), b' in ac in aa' in $a' a_1' (\Sigma_1)$, c' in ab in $acc' a_1' b$ in $ca_2' (\Sigma_2)$, c' in ab in ac' in $a'c (\Sigma_1)$. Für alle zwei Transformationen hat man die Characteristik

$$(c \beta_1),\ (b_2 \gamma),\ (a_1 \alpha_1),\ a_2 \beta_2),\ (a_3 \alpha_3),\ (b_3 \beta_3),\ (b_1 \alpha_2).$$

Mittelst der Parameter beweist man auch noch, dass stets eine involutorische Q^2 existirt, welche als Haupttripel $aa'b$ und als involutorische Paare $a_1'c'$, $a_2'c$ besitzt. Ferner

Theorem LXXXIII. Die Transposition von T_{12} mittelst $c'ca_1'$ gibt eine Transformation, welche einen Bestandtheil der Gruppe über T_{12} bilden muss.

Beweis. Die Parameter von $c'ca_1'$ verificiren $c'+c+a_1'+3a_2'\equiv 0$; die neue Transformation wird also A_2' in einem Wendepunkte von C_6 haben. Dies reicht hin, um zu beweisen, dass die neue Characteristik dieselbe Figur der 7 Punkte wie die vorgelegte besitzt. Denn die gegenseitigen Distanzen sind commensurable Brüche der Perioden, welche sich durch eindeutige Transposition nicht ändern [1]).

Ich breche diesen Paragraphen hiemit ab und bringe die vollständige Lösung des Problemes der M_7 im nächsten Paragraphen.

§ 6. Die typischen Gruppen M_7 hergeleitet durch die Methode der Jacobischen Curve.

Alle Transformationen einer solchen Gruppe reproduciren die Jacobische Curve des durch die 7 Punkte bestimmten Netzes von C_3 und produciren unter den Punkten dieser Curve eine endliche Gruppe von Correspondenzen. Reciprok:

Theorem LXXXIV. Durch eine endliche Gruppe von Correspondenzen in der Jacobischen Curve D_6 ist eine endliche Gruppe von birationalen Transformationen unter den 7 Punkten bestimmt.

Beweis. Jede C_3 des Büschels schneidet D_6 in einem Punktquadrupel und diese Reihe g_4^1 ist einzig und also in sich selbst transformirt. Die zweideutige ebene Transformation, die so entsteht, zerlegt sich in zwei eindeutige Transformationen, deren eine die Wiederholung der anderen, wenn ihr Index ungerade ist. Es folgt:

Theorem LXXXV. Die Gruppe von Transformationen ist isomorph im Grade 2 mit der Gruppe von Correspondenzen in D_6.

Jede Curve D_6 kann in eindeutige Correspondenz mit einer biquadratischen Curve $p = 3$ gesetzt werden, daher:

Theorem LXXXVI. Jede endliche Gruppe von Transformationen mit 7 Punkten ist isomorph im Grade 1 oder 2 mit einer endlichen Gruppe von Collineationen, welche eine biquadratische Curve $p = 3$ in sich transformirt.

---

1) Dieselben Betrachtungen sind stets anwendbar, um aus einer vorgelegten Transformation der Gruppe alle äquivalenten Transformationen herzuleiten, welche in derselben projectiven Form der Gruppe auftreten.

Man kann diese Curve L_4 direct an das Netz der C_3 anknüpfen mittelst der gemeinsamen Tangenten von zwei C_3 des Netzes, die sich berühren und also aussprechen das

Corollar: Die Gruppen von M_7 bringen unter den Tangenten der Curve 4. Classe, welche die 7 Punkte zu Doppelpunkten hat, eine endliche Gruppe von Correspondenzen hervor, welche in einer endlichen Gruppe von ebenen Collineationen enthalten sind.

Geht man umgekehrt von der L_4 aus, welche eine Gruppe von Collineationen besitzen möge, so kann man sagen:

Theorem LXXXVII. Mit jeder Curve L_4, welche eine Gruppe von Collineationen trägt, ist eine gewisse Zahl von Gruppen M_7 birationaler Transformationen verknüpft.

Denn setzt man L_4 von 4. Classe voraus, so besitzt sie eine gewisse Zahl ($\lesseqgtr 273$) von unabhängigen Septupeln von Doppelpunkten und über jedem existirt ein Netz von C_3, dessen Jacobische Curve D_6 von der L_4 aus eine Gruppe von Correspondenzen empfängt und ihrerseits wieder die ebene Gruppe vermöge LXXXIV bestimmt.

Theorem LXXXVIII. Alle Gruppen, welche auf diese Art mit der Curve L_4 verbunden sind, sind birational äquivalent.

Denn man kann von der einen zur Gruppe von Collineationen und von dieser zur anderen Gruppe mittelst derselben 2-deutigen Transformation übergehen. Umgekehrt: Durch die verschiedenen Wahlen des Septupels auf L_4 muss man alle Gruppen M_7 erhalten, welche einer unter ihnen äquivalent sind.

Für die isolirten Transformationen konnte man sagen, dass wenn die Collineation eine oder zwei Tangenten ungeändert lässt, wenigstens eine Transformation der beiden entsprechenden auf 5 oder 6 Punkte reducibel sei. Aber für die Gruppen existirt ein derartiges Theorem über die Reducirbarkeit der Gruppe in einem solchen Falle nicht, weil die vollständige Gruppe alle zwei Transformationen enthält und wenn die eine sich in der Zahl der Punkte reducirt, die andere doch sich nicht reducirt.

Um die birationale Transformation zu erkennen, welche einer Collineation und einem gegebenen Septupel von L_4 angehört, muss man die Umwandlung der 7 Doppelpunkte in die anderen der 28 Doppelpunkte verfolgen. Dann entsprechen diesen Punkten entweder Punkte oder Geraden oder Kegelschnitte oder C_3^4, welche über den 7 Punkten gebildet sind. Die Transformation in Frage wird alsdann die 7 Punkte in diese letzteren Curven verwandeln. Aus meiner Abh. Acta Math. 1895 II. Theil § 2 entnehme ich:

Theorem LXXXIX. Die einzigen Curven L_4 mit $p = 3$, welche durch eine ebene Collineation reproducirt werden, sind:

			λ_1	λ_2	λ_3
1.	$X_1^4+X_2^4+X_3^4+X_1^2X_3^2+X_2^2X_3^2+X_1^3X_2+X_2^3X_1+X_1X_2X_3^2+X_1^2X^2$		1	1	-1
2.	$X_1^4+X_2^4+X_1^2X_2^2+X_3^3X_1+X_3^3X_2+X_1^3X_2+X_2^3X_1$		1	1	ε
3.	$X_1^4+X_2^3X_1+X_3^3X_1+X_1^2X_2X_3+X_2^2X_3^2$		1	ε	ε^2
4.	$X_1^4+X_2^4+X_3^4+X_1^2X_2^2+X_1^3X_2+X_2^3X_1$		1	1	i
5.	$X_1^4+X_2^4+X_3^4+X_1^2X_2^2+X_1X_2X_3^2$		1	-1	i
6.	$X_1^4+X_2^4+X_1^2X_2^2+X_1X_3^3$	$\varepsilon^3 = 1$	1	-1	ε
7.	$X_1^3X_3+X_3^3X_2+X_2^3X_1$	$\varepsilon^3 = 1$	1	ε	ε^3
8.	$X_2^4+X_1^3X_3+X_3^3X_1$		1	$\sqrt{i}$	-1
9.	$X_3^4+X_2^3X_1+X_1^3X_3$	$\varepsilon^9 = 1$	1	ε	ε^3
10.	$X_1^4+X_3^3X_1+X_2^4$	$\varepsilon^3 = 1$	1	i	ε

Die Zahlen rechts sind die Coefficienten λ_1, λ_2, λ_3 der Collineation $\lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3$.

Diese Collineationen sind nun zu endlichen Gruppen zu combiniren.

Theorem XC. Die Form 10. gestattet eine Gruppe von 72 Collineationen.

Beweis. Die Curve besitzt 4 Undulationstangenten, deren Berührungspunkte auf $X_1 X_3$ eine äquianharmonische Form bilden, welche die binäre tetraedrische Gruppe gestattet. Indem man diese Substitutionen mit $x_2' = i x_2$ combinirt, wird man eine Gruppe von $4 \cdot 12$ Collineationen erhalten, welche die cyclische Gruppe der Homologieen $x_1 : ix_2 : x_3$ als ausgezeichnete Untergruppe enthält.

Durch jeden der 4 Undulationspunkte der Form gehen 4 Inflexionstangenten, deren 4 Berührungspunkte in einer Geraden durch X_2 sind. Hieraus entstehen weitere 16 Collineationen des Indexes 6 und 8 vom Indexe 3.

Die Curve besitzt keine absolute Invariante mehr. Denn die 4 Undulationstangenten bilden mit $4(X_1X_3)$ ein Büschel von L_4, welche auf jeder Geraden von X_2 eine Involution mit zwei vierfachen Punkten ausschneiden, welche also alle $j = 0$ haben, das Quadrupel auf $x_2 = 0$ hat $i = 0$. Also jede Curve des Büschels ist collinear jeder anderen Curve des Büschels.

Theorem XCI. Wenn diese Curve einen einzigen weiteren Undulationspunkt besitzt, besitzt sie deren 12 und ist $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$.

Beweis. Das ist eine elegante Consequenz der Existenz der Gruppe. Aber wenn die Curve eine Collineation gestattet, welche X_1X_3 in eine

andere Gerade verwandelt, muss sie nothwendig einen weiteren Undulationspunkt besitzen. Also:

Theorem XCII. Die erhaltene Gruppe von 72 Collineationen kann in keine Gruppe als Untergruppe eintreten.

Theorem XCIII. Die Collineation der Form 9. tritt in keine Gruppe von Collineationen mit invariantiver L_4 ein.

Beweis. Die Curve L_4 besitzt in X_2 einen Undulationspunkt mit X_2X_3 als Tangente und in X_1 einen Wendepunkt mit X_1X_2 als Tangente. Sie schneidet X_1X_3 in drei bezüglich X_1, X_3 cyclischen Punkten, welche Wendepunkte mit Tangenten durch X_2 sind. Die Curve kann also keinen anderen Undulationspunkt besitzen. Wenn eine andere Collineation existirte, welche X_2 in einen anderen Undulationspunkt verwandelt, würde dieser als Folge sofort einen Cyclus von 9 Undulationspunkten haben, und andererseits die 3 neuen Wendepunkte von vorhin. Aber die 10 Undulationspunkte mit den 4 ersten Wendepunkten erschöpfen schon die 24, also kann die Collineation nicht existiren[1]. Wenn sie X_2 in sich selbst verwandelte, würde sie auch die Gerade X_2X_3 in sich selbst verwandeln und daher auch die Gerade X_1X_2, da das Quadrupel auf X_1X_3 äquianharmonisch ist. Sie wird also identisch mit der vorgelegten Collineation sein.

Theorem XCIV. Die Form 8. gestattet eine Gruppe von 96 Collineationen.

Beweis. Durch eine Substitution der X_1, X_3 nimmt die Gleichung die Form $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ an, welche beweist[2]: 24 Collineationen vom Index 8, 18 vom Index 4, 15 vom Index 2, 32 vom Indexe 3 und die Identität. Die Curve besitzt 12 Undulationspunkte und die anderen 16 Doppeltangenten bilden eine cyclische Configuration.

Theorem XCV. Die Form 7. gestattet immer die Gruppe von 168 Collineationen.

Herr Klein hat (Math. Ann. Bd. XIV »Ueber die Transformation 7. Grades der elliptischen Functionen«) die 168 Collineationen aufgeschrieben und eine genaue Untersuchung der biquadratischen Form geliefert.

Theorem XCVI. Die Form 6. gestattet keine andere Gruppe ohne mit der Form 10. identisch zu werden.

---

1) Das Büschel von $3(X_1X_3) + X_2X_3$ und dem Quadrupel der 4 Wendetangenten enthält Curven, welche alle von derselben Art und also unter einander collinear sind. Jede würde 9 andere Undulationspunkte haben, die Hessesche Curve wäre dieselbe C_3 für alle und invariant, was nicht möglich ist.

2) Cf. W. Dyck: Math. Ann. Bd. 17.

Beweis. Die Curve besitzt eine Undulationstangente, welche ungeändert bleibt und 4 Wendetangenten, deren Berührungspunkte alineirt sind. Für die Vorraussetzung, dass der Punkt X_3 ungeändert bleibt, sieht man, dass X_1X_2 und X_2 fest sein müssen. Es wäre nur möglich eine fernere Substitution $x_1 : -x_2 : \lambda x_3$, welche dann nothwendig mit der gegebenen Substitution zusammenfällt. Wenn L_4 einen anderen Undulationspunkt auf X_1X_3 gestattet, hat sie sofort 4 und ist daher die Form 10, wenn ausserhalb X_1X_3, hat sie deren 6 und 24 andere Wendepunkte, was widersprechend ist.

Theorem XCVII. Die Typen 4. bis 7. von Jordan lassen keine biquadratische Curve ungeändert.

Die geometrische Deutung liefert sofort, dass die niedersten Curven (ausser C_2 und C_3) von der 6. Ordnung sind.

Theorem XCVIII. Die Form 5. gestattet i. A. eine Gruppe von 16 Collineationen, aber sie gestattet keine andere, ohne mit 10. oder 8. zu coincidiren.

Beweis. Man kann sie in die Form $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^2 x_2^2$ bringen und sie gestattet dann die Collineationen $1, -1, -1$; $1, -1, 1$; $1, 1, -1$; $1, -1, i$; $1, -1, -i$, aber auf drei Arten.

Theorem XCVIIII. Die Form 4. gestattet nur 16 Collineationen und gestattet keine andere ohne mit n. 5 oder n. 7 zu coincidiren.

Beweis. Die Form in X_1, X_2 kann auf drei Arten in die Form gesetzt werden, wo nur die Biquadrate und Quadrate vorkommen und so folgt, dass 6 Centren von Homologieen auf X_1X_2 vorhanden sein müssen. Ueberdies existiren Collineationen $x_1 : -x_2 : \pm i x_3$, $-x_1 : x_2 : \pm i x_3$, 3 mal, also $6 + 6 + 4$ Collineationen.

Theorem C. Die Form 3. gestattet keine andere Collineation ausser 1., ohne mit einer der schon erhaltenen Gruppen zu coincidiren.

Beweis. Das Coordinatendreieck muss ungeändert bleiben und $X_2 X_3$ die Centren der Perspectivitäten enthalten, welche in der Zahl 3 vorhanden sein werden. Es sind die Centra für die beiden Punktetripel auf $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Wenn das Coordinatendreieck nicht fest bliebe, und dieselbe Collineation auf einer anderen Doppeltangente existirte, würde man mittelst der Permutationen unter den 28 Doppeltangenten Collineationen eines Indexes > 3 haben.

Theorem CI. Die Form 1. gestattet nur 6 Perspectivitäten, deren Centren auf der Axe $X_1 X_2$ sind, oder 15, deren Centra gleichzeitig auf allen 3 Coordinatenaxen sind.

Diese Gruppen gehören zu den Formen $x_3^4 + x_3^2 f_1(x_1^2, x_2^2) + f_2(x_1^2, x_2^2) = 0$ wo $f_2 = a_2(x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4)$, $f_1 = a_1(x_1^2 + x_2^2)$, oder zu $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a(x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2) = 0$, wo aber nunmehr keine Coefficienten unterdrückt sind.

Theorem CII. Die endlichen Gruppen von Collineationen, welche eine L_4 mit $p = 3$ in sich transformiren, sind also:

1. Die Gruppe der Curve $X_3^4 + f(X_1, X_2) = 0$ mit $i = 0$ für f.
2. Die cyclische Gruppe des Indexes 9.
3. Die Gruppe von $a_1 X_1^4 + a_2 X_2^4 + a_3 X_3^4 = 0$.
4. Die Gruppe von $a_1 X_1^3 X_2 + a_2 X_2^3 X_3 + a_3 X_3^3 X_1 = 0$.
5. Die cyclische Gruppe von $x_1, -x_2, \varepsilon_3 x_3$ der Curve
   $a_1 X_1^4 + a_2 X_2^4 + a_3 X_1^2 X_2^2 + a_4 X_1 X_3^3 = 0$.
6. Die Gruppe von $a_1 X_1^4 + a_2 X_2^4 + a_3 X_3^4 + a_4 X_1^2 X_2^2 = 0$.
7. Die cyclische Gruppe von $x_1, \varepsilon_3 x_2, \varepsilon_3^2 x_3$ von $a_1 X_1^4 + a_2 X_2^3 X_1 + a_3 X_3^3 X_1 + a_4 X_1^2 X_2 X_3 + a_5 X_2^2 X_3^2$ oder
8. diese mit drei involutorischen Perspectivitäten [1]).
9. Die cyclische Perspectivität des Indexes 3 allein.
10. Eine einzige involutorische Perspectivität.
11. Drei involutorische Perspectivitäten.
12. Sieben involutorische Perspectivitäten.
13. 15 involutorische Perspectivitäten, 6 Collineationen vom Indexe 6, zwei vom Indexe 3.
14. Die Curve L_4 ohne Collineation [2]).

Die Curve 14. liefert den Typus Θ_2 allein, die Curve 10. liefert zwei involutorische Transformationen, von denen eine eine C_3 mit Doppelpunkten hat, während die andere vier Doppelpunkte besitzt. Die zwei Transformationen sind also äquivalent mit der cubischen Involution und mit (aa'), (bb'), (cc'). Die Curve 9. liefert die Transformation Δ_3 mit d_1 und Γ_6''. Die Curve 11 liefert 8 Transformationen, welche drei C_3 mit willkürlichem Modul invariant lassen. Um die Gruppe zu haben, genügt es, in einer cubischen Involution zwei invariante C_3 so zu nehmen, dass die drei Curven sich in Paaren schneiden, welche auf den drei Curven drei contangentiale Quadrupel bilden. Die Curve 2. gibt ersichtlich die cyclische Gruppe von B_{18} (cf. Acta Math. 1895). Hier kann man einen wichtigen Schluss machen. Wenn man durch eine Q^2 überträgt, welche die Hauptpunkte über den 7 Punkten hat, erhält man verschiedene äquivalente Transformationen. Keine dieser Transformationen kann dieselbe Figur wie B_{18} haben. Denn sonst wäre es möglich, sie passend auf die Figur von B_{18} zu übertragen und

1) Dieses ist die Untergruppe G_6' von Klein M. A. XIV. p. 441.

2) Um etwaigem Zweifel zu begegnen, bemerke ich, dass das Büschel der L_4, welche 4 willkürlich gegebene Undulationspunkte haben, keine Curve enthält, welche durch die octaedrische Gruppe von Collineationen über den vier Punkten invariant wäre.

mit B_{18} zu einer endlichen Gruppe zu combiniren. Also: Die Figur von B_{18} ist durch keine Transposition in eine ihr projective Figur verwandelt.

Der Form 6. entspricht eine vollständige Gruppe von 32 Transformationen, welche durch E_4 bestimmt ist. Sie enthält als Untergruppe die Gruppe 12. Es wäre mittelst der Methoden des § 6 sehr complicirt gewesen, zu beweisen, dass E_4 immer $2 \cdot 12$ andere Transformationen gestattet.

Die Gruppe 8. ist, wie man weiss [1]), eine Untergruppe der Gruppe 4; aber sie existirt auch in allgemeinerer Form als vollständige Gruppe. Sie besitzt eine zerlegte invariante C_3. Die eine Transformation kann quadratisch gemacht werden, indem $a_2 a_3 a_4$ der Transformation Γ_6' Hauptpunkte werden und mit $a_1 a$, $b_2 b$ als involutorischen Paaren. Die anderen Transformationen entstehen durch Zusammensetzung mit Γ_6'.

Die Gruppe 4. liefert 336 Transformationen; und um dieselben zu rechnen, hat man mittelst der Gleichungen der 28 Doppeltangenten ihre Vertauschung durch die Collineationen zu verfolgen und durch meine Acta Math. 1895 angegebene Methode zu übertragen.

Ueber die Form 1. [1]) will ich noch bemerken, dass die drei zu B_{12} äquivalenten Transformationen, welche in der Gruppe 1. vorkommen, weder B_{12}, noch (ab'), a' in a_1' in a_2' in b, c' in c sein können, wenn die erste Transformation von dieser Art ist.

Denn die Curve C_e müsste auch durch die neue Characteristik invariant sein und da a ein Wendepunkt ist und die Gerade cc' durch eine Ecke des Hesseschen Dreieckes geht, so sind diese drei Punkte unter den 7 Punkten auf C_e bestimmt und hiermit die ganze Characteristik.

T h e o r e m CIII. Es gibt drei verschiedene Formen der 1. Gruppe, je nachdem 0, 1, 2 Curven C_3^3 existiren, welche ihre Spitzen auf einem der 7 Punkte haben.

Beweis. Zwei Septupel der Form 1., welche gleich oder ungleich gelegen sind mit Bezug auf die 4 Undulationstangenten, liefern gleiche oder ungleiche Gruppen.

Die Gruppe, welche 3. entspricht, ist vollständig durch die Transformation (ab'), (bc'), a' in a_1' in c vom Indexe 8 bestimmt, welche sie enthält und zwar wegen des Th. XCIV. Die Septupel sind von 3 Arten, je nachdem sie eine oder zwei Undulationstangenten besitzen

1) F. Klein l. c.

2) Das Studium dieser Curve ist ebenso interessant wie jenes der von Herrn Dyck studirten Curve $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$, ist aber von Masoni in seiner Abhandlung über die Curven 4. Ordnung mit Undulationspunkten übersehen worden. Die zwei Curven unterscheiden sich durch eine Invariante $i = 0$ oder $j = 0$.

oder keine. Es gibt also drei projectiv verschiedene Formen dieser Gruppe und man erhält sie, indem man auf alle möglichen wesentlich verschiedenen Arten drei Hauptpunkte einer Q^2 auf die 7 Punkte verlegt, deren Parameter auf der invarianten C_h gegeben sind. Die Vergleichung der Parameter l. c. p. 138 und p. 289 würde auch das Resultat liefern, dass E_4 und die Transformation von II § 25 n. 4 verträglich sind. Jedenfalls ziehen wir aus der Gleichung den Schluss:

Theorem CIV. Wenn die Transformation E_4 eine harmonische C_3 mit lauter Doppelpunkten hat, bildet diese mit zweien der invarianten C_h des stets vorhandenen Büschels zwei andere Büschel von C_h.

Durch Zusammenfassung dieser sämmtlichen Interpretationen folgt nun

Theorem CV. Die typischen vollständigen Gruppen mit 7 Punkten sind:

I.	*Die Gruppe, welche B_{12} enthält*	$r = 144.$
II.	*Die Gruppe, welche B_{14} enthält*	$r = 336.$
III.	*Die Gruppe, welche (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c; d_1, d_2 enthält*	$r = 192.$
IV.	*Die Gruppe von Γ'_6 mit drei Involutionen*	$r = 12.$
V.	*Die cyclische Gruppe von B_{18}*	$r = 18.$
VI.	*Die Gruppe von B_6 mit Δ_6*	$r = 12.$
VII.	*Die cyclische Gruppe von Γ'_6*	$r = 6.$
VIII.	*Die cyclische Gruppe von Γ''_6*	$r = 6.$
IX.	*Die Gruppe der allgemeinsten E_4*	$r = 32.$
X.	*Die Untergruppe von III, welche 15 Involutionen enthält, in allgemeinster Form*	$r = 96.$
XI.	*Die Gruppe von 7 Involutionen mit Θ_2*	$r = 16.$
XII.	*Die Gruppe von 3 Involutionen mit Θ_2*	$r = 8.$
XIII.	*Die cubische Involution mit Θ_2*	$r = 4.$
XIV.	*Die Transformatian Θ_2 in allgemeinster Form*	$r = 2.$

§ 7. Die typischen Gruppen von M_8 hergeleitet aus den geometrischen Figuren.

Alle Transformationen, welche auf 8 Punkte verlegt werden können, sind: 1. B_6 mit involutorischem Paare oder zwei Doppelpunkten. 2. Δ_3 mit zwei Doppelpunkten. 3. B_9 mit zwei Doppelpunkten. 4. B_{12} mit zwei Doppelpunkten oder einem involutorischen Paare. 5. a' in a, b' in b, c' in c mit zwei Doppelpunkten oder einem involutorischen Paare. 6. Γ_6 mit zwei Doppelpunkten oder einem involutorischen Paare. 7. B'_{12} mit Doppelpunkt. 8. B_{14} mit Doppelpunkt. 9. B_{18} mit Doppelpunkt. 10. Γ'_6 mit Doppelpunkt. 11. Γ''_6 mit Doppelpunkt. 12. Δ^1_6 mit Doppelpunkt. 13. E_4 mit Doppelpunkt. 14. B_{20}. 15. B_{24}.

16. B_{30}. 17. Γ_{10}. 18. Γ_{12}. 19. $\varDelta_8$. 20. E_6. 21. E'_6. 22. E''_6. 23. Z_5. 24. H_6. 25. I_4. 26. N_3. 27. Θ_2 mit Doppelpunkt. Ueberdies sind die orthanallagmatischen Transformationen und die homographischen Cyclen, die über 8 Punkten gebildet werden können, zu discutiren.

Theorem CVI. Eine Gruppe mit 8 Punkten, wo die 8 Punkte Alineationen oder unendlich nahe Lagen haben, ist reductibel durch birationale Transposition auf eine Gruppe mit weniger als 8 Punkten oder auf eine orthanallagmatische Gruppe.

Beweis. Eine einzige Alineation $a_1 a_2 a_3$ reducirt die Ordnung der Curve D_9 auf 8 und diese D_8 überträgt sich birational in eine Curve D_6 mit 7 Doppelpunkten. Eine Transformation, welche D_6 in sich transformirt, kann keinen Fundamentalpunkt ausserhalb dieser 7 Punkte haben, wegen der Relation $3(n-1) = \Sigma\alpha$, also ist die Gruppe auf 7 Punkte reducirt. Für zwei Alineationen $a_1 a_2 a_3$ und $a_4 a_5 a_6$ bleibt D_7 mit zwei dreifachen Punkten und durch birationale Uebertragung eine Curve D_6 mit 7 Doppelpunkten und einfachem Punkte, also ist die Gruppe reducirt auf 7 Punkte. Für zwei Alineationen $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_4 a_5$ reducirt sich D_9 auf D_7 und durch birationale Transposition hat man D_5 mit 4 Doppelpunkten und endlich D^4 mit einem Doppelpunkte. Für drei Alineationen, welche a_1 gemeinsam haben, dasselbe Resultat. Für $a_1 a_2 a_3$, $a_3 a_4 a_5$, $a_5 a_6 a_1$ hat man Transposition von D_6 auf eine C_3, welche nur durch 7 Punkte geht und also Reduction der Gruppe auf 7 Punkte. Für $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_4 a_5$, $a_5 a_6 a_7$ hat man Transposition von D_6 auf D_4 mit a_8^2, also auf orthanallagmatische Gruppe. Für $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^2$ hat man Reduction von D_9 auf D_7 und Transposition von D_7 auf D_6 mit 7 Doppelpunkten und einfachem Punkte und daher Gruppe mit 7 Punkten und ebenso für alle anderen conconischen Lagen. Für zwei unendlich nahe Punkte wendet man eine Transposition auf eine Figur an, wo wenigstens eine Alineation erscheinen wird und die Gruppe wird in Folge des Vorigen reducirt oder reductibel sein.

Theorem CVII. Die folgenden Transformationen können nicht in Gruppen vorkommen, welche nicht auf 7 Punkte oder auf eine orthanallagmatische Gruppe reducirbar sind: (ab'), (bc'), (ca') mit d_1 und $i_1 i_2$; (ab'), (ba'), (cc') mit Quintupel; (aa'), (bb'), (cc') mit d_1 und zwei involutorischen Paaren; (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c mit d_1 und $i_1 i_2$; B_6 mit $i_1 i_2$; B_9 mit $d_1 d_2$; a' in a, b' in b, c' in c mit d_1, d_2 oder mit $i_1 i_2$; Γ_6 mit d_1, d_2 oder $i_1 i_2$; B'_{12} mit d_1; B_{14} mit d_1; B_{18} mit d_1; Γ'_6 mit d_1; Γ''_6 mit d_1; B_{12} mit d_1, d_2 oder $i_1 i_2$.

Beweis. Ich muss meine Resultate über die Eigenschaften dieser Transformationen benützen, wie sie aus meiner Preisschrift zu schöpfen sind. II. § 30 sagt, dass (ab'), (bc'), (ca') Alineation verlangt, (ab'), (ba'), (cc') erfordert für das Quintupel einen Kegelschnitt durch ab;

(aa'), (bb'), (cc') durch d^2, a, b, c und die involutorischen Paare eine C_3. § 25 sagt, dass (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c die Punkte $a'cd_1i_1$ alineirt hat; § 12 sagt, dass $B_6i_1i_2$ eine Alineation durch σ'' gibt; § 19, dass B_9 eine C_3^4 durch $d_1^2d_2$ gestattet; § 2 dass a' in a, b' in b, c' in c mit d_1 bereits Alineation liefert, ebenso mit i_1i_2, § 20, dass B'_{12} eine C_3^3 mit d_1^2 und einer Alineation $a'_1c'_1d_2$ und einem Büschel von C_3 mit Berührung in d_3 besitze; § 21, dass B_{14} drei C_3^3 mit d_i^2 gestattet; § 26, dass $C_3^3d_1^2d_2$ existirt, III § 9 VI 1. sagt, dass d_1 mit drei Punktepaaren der Characteristik alineirt ist, III § 9 VI 9. und 10 sagen, dass Γ'_6 4 C_3^3 durch d_2^2, d_3^2, d_4^2, d_5^2 und die Alineation $a_1b_1d_1$ hat und $\Gamma''_6\,d_1d_2$ auf der Geraden a_1b_1. — Auf alle diese Transformationen erstreckt sich also das Theorem CVI.

Theorem CVIII. Die folgenden orthanallagmatischen Transformationen können sich in keiner Gruppe M_8 vorfinden, welche nicht auf 7 Punkte oder auf eine orthanallagmatische Gruppe reductibel ist: (cc'), a' in b, b' in a mit $d_1d_2d_3$; (ab), (a_ib_i), $i = 1\ldots 6$; (cc'), a' in a'_1 in b, b' in b'_1 in a mit d_1; (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in b mit d_1; (ab), (a_1b_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in a_4 mit d_1; (ab), (a_1b_1), b_2 in a_2, b_3 in a_3, b_4 in a_4; (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in b mit d_1d_2, (cc'), (ab'), a' in a'_1 in b mit $d_1d_2d_3$.

Denn mehrere besitzen Kegelschnitte durch 6 Punkte, andere Alineationen durch drei Punkte.

Theorem CIX. Die einzigen typischen Octupel in der Ebene, welche Collineationen erlauben, sind jene, welche aus zwei cyclischen Tripeln und zwei Doppelpunkten einer Collineation bestehen.

Beweis. Eine involutorische Perspectivität lässt sich nicht ohne Alineation auf 8 Punkte arrangiren; für den Index 5 ist es ersichtlich; für 7 habe ich l. c. I § 4 bewiesen, dass eine $C_3^3d_1^2a_1\ldots a_7$ existirt, wo d_1 ein willkürlicher Doppelpunkt ist.

Theorem CX. Wenn die Transformation Σ 17. Ordnung mit 8 sechsfachen Punkten mit einer gewissen Directrixsubstitution besteht, muss diese Substitution auch wirklich als Collineation in der Ebene bestehen.

Beweis. Die Transformation $(e_i\varepsilon_i)$ existirt ohne Bedingung, und indem man $(e_i\varepsilon_k)$ mit $(e_i\varepsilon_i)$ zusammensetzt, hat man e_i in $(e_i^3e_{i+1}^2\ldots)^6$ in e_k, also Collineation.

Corollar. Die einzigen existirenden Transformationen Σ sind also $(e_i\varepsilon_i)$ und $(e_1\varepsilon_1)$, $(e_2\varepsilon_2)$, $(e_1\varepsilon_2)$, $(e_2\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$, $(e_4\varepsilon_5)$, $(e_5\varepsilon_6)$, $(e_6\varepsilon_4)$.

Theorem CXI. Der Typus B_{30} tritt in keine umfangreichere Gruppe ein.

Beweis. Er besitzt eine feste Curve C_6 und eine feste C_3^3. Alle C_3 des Büschels sind C_e und die 5 anderen C_3^3 bilden einen Cyclus vom

Index 5. Aber 6 binäre Elemente dieser Lage gestatten keine andere binäre Projectivität. Durch den Punkt d_1 ist die B_{30} eindeutig bestimmt.

Theorem CXII. Der Typus B_{20} bildet ebenfalls eine vollständige Gruppe.

Beweis. Die C_3 des Büschels sondern sich in Decatupel einer Projectivität, deren 10fache Elemente C_3^3 und C_ε sind. Es existirt keine von ihren Wiederholungen verschiedene Projectivität, welche diese Involution in sich transformiren könnte und B_{20} ist vollständig durch d_1 bestimmt.

Theorem CXIII. Der Typus E_6 gestattet als binäre Form 6. Grades der 6 Curven C_3^3 seines Büschels jede denkbare Sextik.

Beweis. Die Parameterrechnung, welche ich in der Preisschrift IV § 3 gegeben habe, beweist, dass man auf C_ε zwei willkürliche Inflexionstripel nehmen kann, welche dem Hesseschen Dreiecke angehören und noch willkürlich die Correspondenz $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. Dies ist in Uebereinstimmung mit den drei absoluten Invarianten der Sextik. Denn es ist unmöglich, die Inflexionstripel von C_ε collinear unter einander zu übertragen.

Theorem CXIV. Die einzigen Gruppen von Transformationen, welche eventuell mit einem Büschel von C_ε mit 6 Curven C_3^3 existiren sind jene, wo die 6 C_3^3 sind 1. zwei involutorische Paare und zwei Doppelelemente einer einzigen Involution 2. drei involutorische Paare einer einzigen Involution 3. drei involutorische Paare einer octaedrischen Form oder ein cyclisches Quadrupel und zwei Doppelelemente 4. zwei willkürliche cyclische Tripel 5. ein cyclisches Quintupel und ein Doppelelement 6. ein cyclisches Sextupel.

Die binären Elemente gestatten keine anderen Fälle von Gruppen von Projectivitäten. Der 5. Fall liefert B_{30}.

Theorem XCV. Eine involutorische Transformation über 8 Punkten ohne besondere Lage, welche die C_3 des Büschels unter einander mit dem Index 2 vertauscht, ist nothwendig äquivalent (ab), $(a_i b_i)$ $i = 1 \ldots 4$.

Denn Θ_2 transformirt alle C_3 in sich und würde überdies nach CIX zu beseitigen sein, ebenso wie Collineation.

Theorem CXVI. Die allgemeinste Transformation (ab), $(a_i b_i)$, $i = 1 \ldots 4$ mit $d_1 d_2 d_3$ setzt mit Σ_2 eine vollständige Gruppe zusammen.

Die 3. Transformation der Gruppe ist involutorisch und äquivalent demselben cubischen Typus.

Theorem CXVII. Eine Transformation des Indexes 4 über 8 Punkten ohne besondere Lage, welche die Curven nach dem Indexe 2 vertauscht, ist nothwendig äquivalent mit I_4.

Es ist nothwendig, zum Beweise auf die Aufzählung der Typen zu recurriren, welche ich nach zwei verschiedenen Principien gegeben habe und zwar in Folge der noch unvollkommenen Kenntnisse, welche man über die Büschel von C_3 besitzt. Man bemerkt nun, dass E_4 nicht die C_3 mit dem Index 2 unter einander vertauscht und dass kein anderer Typus des Indexes 4 sich mit den 8 Punkten verträgt.

Theorem CXVIII. Die Transformation I_4 bildet im allgemeinsten Falle eine vollständige (cyclische) Gruppe.

Denn der Punkt d_1 bestimmt die Transformation und es hängt also von der Structur des Büschels ab, ob der Index 2 die cubische involutorische Transformation oder die Transformation I_4 herbeiführt [1]).

Theorem CXIX. Die Transformation E_4 und d_1 bildet mit Σ_2 eine vollständige Gruppe.

Beweis. Die Transformationen, welche die C_3 des Büschels von E_4 in sich transformiren, sind mit E_4 erschöpft und es existirt kein anderer Typus mit 8 Punkten, welcher ein Büschel harmonischer Curven besässe. Es wäre zu lang, hier alle Typen durchzugehen, wo ein Büschel von C_3 mit willkürlichen Moduln erscheinen kann, aber das Resultat scheint mir unbestreitbar.

Uebrigens würde die Transformation nicht mit E_4 vertauschbar sein können, weil die Zusammensetzung mit Σ_2 mit (cc'), b' in a, a' in b vertauschbar sein, also orthanallagmatisch sein müsste. Aber das Theorem CXI zeigt, dass keine andere Transformation als (cc'), a' in b, b' in a zulässig ist. Sie müsste also vom Index 8 sein und sicher verschieden von Δ_8. Wir hätten also zwei neue Typen des Indexes 8. Sofern meine Typentafel nicht falsch ist, ist die Wahrheit des gegenwärtigen Theoremes aufrecht zu erhalten.

Theorem CXX. Eine Transformation des Indexes 6 über 8 Punkten ohne besondere Lage, welche die C_3 eines Büschels mit dem Indexe 2 vertauscht, ist nothwendig äquivalent mit H_6.

Die C_3 sind nothwendig äquianharmonisch. Die 3. Wiederholung ist gemäss CXV äquivalent $[(ab), (a_i b_i)]^3$ und die 2. mit N_3 und indem die Betrachtungen in der Preisschrift IV § 3 vervollständigt werden, sieht man, dass dies mit H_6 übereinstimmt. Auch findet man, dass H_6, mit Σ_2 zusammengesetzt, neuerdings eine mit H_6 äquivalente Transformation gibt.

Theorem CXXI. Eine Transformation des Indexes 12 über 8

---

1) Es ergibt sich aus dem folgenden Theoreme CXXII, dass I_4 mit einem Büschel harmonischer Curven nicht existirt, während I_4 mit einem panäquianharmonischen Büschel existirt, was immerhin im Auge zu behalten ist.

Punkten ohne besondere Lage, welche die C_3 mit dem Indexe 2 vertauscht, ist nothwendig äquivalent Γ_{12}.

Die 2. Wiederholung ist nothwendig E_6, die 3. ist I_4, was hinreicht, um den Typus Γ_{12} zu identificiren, welcher die 2. Wiederholung von B_{24} ist.

Theorem CXXII. Eine Transformation mit dem Index 4 unter den C_3 eines Büschels, dessen Basispunkte keine besondere Lage haben, kann nicht den Index 4, noch 16, noch 12 haben.

Beweis. Es existirt kein Typus vom Index 16. Der Index 4 beseitigt sich durch das Theorem CX und für Index 12 wurde nur bei B_{12} ein solches Büschel angetroffen und dies gestattet nicht Σ_2[1]).

Theorem CXXIII. Eine Transformation des Indexes 24 über den C_3 eines Büschels, dessen Scheitel keine besondere Lage haben, ist äquivalent B_{24}.

Denn die Transformation ist bestimmt durch den Doppelpunkt d_1 und der Index im Büschel kann nicht 12 sein, weil es keine Transformation mit Index 12 und Büschelindex 6 gibt und nicht < 4 wegen der Correspondenzen in C_3; hiezu kommt CXXII.

Theorem CXXIV. Die einzigen Transformationen des Index 3, welche die C_3 eines Büschels mit Scheiteln ohne besondere Lage besitzen, sind die Collineation (2 Tripeln und 2 Doppelpunkte) und Δ_3 mit zwei Doppelpunkten.

Beweis. Das Büschel durch zwei periodische Tripel und zwei Doppelpunkte $d_1 d_2$ einer Collineation hat d_3 als 9. Scheitel. Die zwei invarianten C_3 des Büschels sind die zwei C_e, welche $d_1 d_2 d_3$ als Tangentialtripel haben und sie absorbiren alle C_e des Büschels.

Das Büschel durch Δ_3 und $d_1 d_2 d_3$ hat eine Curve C_k mit Doppelpunkten, das andere ist äquianharmonisch und besitzt $d_1 d_2 d_3$ als Tangentialtripel.

Theorem CXXV. Der einzige Fall, wo das erste Büschel von CXXIV panäquianharmonisch wird, ist jener der cyclischen Configuration.

Beweis. Ich bediene mich der Abbildung von F_3. Wenn die Punkte $d_1 d_2 d_3$ und 3 Punkte eines cyclischen Tripels zur Abbildung dienen, ist die Fläche jene, deren Gleichung $\Sigma x_i^3 = 0$ werden kann. Die Einhüllende der Ebenen, welche diese F_3 in Curven C_e schneiden,

---

1) Ich habe absichtlich die Schlussfolgerung nur auf meine Aufzählung der Typen gegründet. Denn da das Büschel von C_e mit dem Büschelindex 4 existirt, ist es immerhin überraschend, dass die Transformation vom Indexe 12, welche den Index 4 unter den C_3 hätte, nicht existirt, ebensowenig wie eine Transformation vom Index 4 mit dem Büschelindex 4.

zerlegt sich in $X_1 X_2 X_3 X_4 = 0$, und die Büschel von Ebenen, deren Axen die Kanten des Tetraeders $X_1 X_2 X_3 X_4$ sind, liefern Büschel durch cyclische Configurationen.

Theorem CXXVI. Der einzige Fall, wo das zweite Büschel aus CXXIV ∞^1 Curven C_e enthält, ist jener, wo der Ort der Doppelpunkte C_e ist.

Beweis. Gemäss dem § 5 ist $\varDelta_3$ das Bild einer Perspectivität in einer F_3, deren Gleichung ist $x_4^3 + L_3(x_1, x_2, x_3) = 0$. Die Fläche der Ebenen von C_e zerlegt sich in das Bündel X_4 und in eine Fläche der 3. Classe. Die 27 Geraden dieser Fläche sind zu drei und drei in Ebenen durch X_4 gelegen und gehen daselbst zu dreien durch dieselben Punkte in der Ebene x_4. Eine dieser Geraden kann niemals in $x_4 = 0$ gelegen sein, ohne dass Φ^3 sich zerlege. Man folgert nun aus Theorem LXIII das

Lemma. Die Fläche Φ^3 von $x_4^3 + L_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ zerlegt sich nur in drei Bündel, deren Centra in der Ebene $x_4 = 0$ sind und dies ist in dem Falle, wo L_3 äquianharmonisch ist.

Da aber die drei anderen Scheitel des gewünschten Büschels drei Doppelpunkte von $\varDelta_3$ sein müssen, so muss die Axe des Ebenenbüschels in x_4 sein und da die C_3 äquianharmonisch sein müssen, muss die Axe durch X_1 oder X_2 oder X_3 gehen.

Theorem CXXVII. Die Collineation des Indexes 3 aus CXXIV bildet mit Σ_2 eine vollständige (cyclische) Gruppe, welche in keine umfangreichere Gruppe eintreten kann.

Die Zusammensetzung gibt E_6'. Dass sie vollständig ist, beweist man mittelst CXXIV.

Theorem CXXVIII. Die Transformation $\varDelta_3$ mit $d_1 d_2$ in ihrer allgemeinsten Form bildet mit Σ eine vollständige (cyclische) Gruppe.

Die Zusammensetzung gibt E_6''. Dass die Gruppe vollständig ist, wird mittelst CXXIV bewiesen. Fügen wir noch hinzu:

Theorem CXXIX. Die Transformation E_6 in allgemeinster Form bildet für sich allein eine vollständige cyclische Gruppe.

Gehen wir endlich über zu einem Büschel, wo der Index unter den C_3 6 ist.

Theorem CXXX. Eine Transformation über 8 Punkten ohne besondere Lage, welche die C_3 nach dem Indexe 6 vertauscht, ist nothwendig äquivalent B_6 mit $d_1 d_2$ oder H_6^1.

Der § 12 l. c. zeigt, dass das Büschel $d_2 d_3 d_4$ den Index 6 hat ebenso das Büschel von H_6^1. Ein anderer Typus mit diesem Index existirt nicht.

Theorem CXXXI. Die Zusammensetzung von B_6, $d_1 d_2$ mit Σ_2 gibt H_6^1.

Beweis. Das Büschel besitzt in B_6 eine invariante Curve, Ort involutorischer Paare und eine invariante Curve C_ε mit $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Die Σ_2 hat d_1 als Doppelpunkt und nach der Definition sowie weil $d_1 d_2 d_3$ auf J_3 contangential sind, ist die Involution auf J_3, welche durch Σ_2 hervorgerufen ist, dieselbe wie jene, welche durch B_6 hervorgerufen ist. Die Zusammensetzung hat also eine C_3 mit Doppelpunkten und willkürlichem Modul. Sie besitzt den Index 6 unter den C_3 und ist selbst vom Indexe 6. Die zweite invariante C_3 ist C_ε mit $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ und die zwei festen C_3 schneiden sich in drei Inflexionstripeln, aber deren eines nicht demselben Systeme wie die zwei anderen angehört. All das setzt die Identität mit H_6^1 in Evidenz.

Corollar. Es existirt also auch ein besonderer Fall von H_6^1, wo alle C_3 des Büschels C_ε sind.

Theorem CXXXII. Im Falle des panäquianharmonischen Büschels liefert die Zusammensetzung von B_6, $d_1 d_2$ mit N_3 wieder H_6^1 und eine B_6 äquivalente Form.

Nämlich die eine Curve wird $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ tragen und da die Correspondenz $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ auf der invarianten C_ε durch einen Doppelpunkt d_1 bestimmt ist, wird die Zusammensetzung entweder ∞^1 Doppelpunkte oder die Wiederholung derselben Correspondenz geben, je nachdem man mit $(N_3)^{-1}$ oder mit N_3 zusammensetzt. Die erste Transformation wird H_6^1 sein, die zweite ist eine sehr schwierig zu identificirende Transformation, welche aber wohl nach der Methode Acta Math. Bd. XIX. II. Th. § 3 (cf. den hier folgenden § 8) keine andere als eine vom Typus B_6 sein kann.

Die Gruppe, welche durch Zusammensetzung von B_6 mit der cyclischen Gruppe von E_6 entsteht, enthält im Ganzen 54 Transformationen.

Die Gruppe, welche die Zusammensetzung von Δ_3, $d_1 d_2$ mit der cyclischen Gruppe von E_6 ist, enthält im Ganzen 18 Transformationen.

Theorem CXXXIII. Die Transformation Z_5 (und auch Γ_{10}) tritt in keine andere Gruppe als in B_{20} und B_{30} ein.

Das panäquianharmonische Büschel mit $6\, C_3^3$, wo diese 6 Curven ein cyclisches Quadrupel und zwei Doppelelemente bilden, führt direct zu B_{24} und die Gruppe wird i. A. keine andere Transformation enthalten. Aber wenn das Quadrupel derart speciell ist, dass die $6\, C_3^3$ eine Form T sind und also die octaedrische Gruppe gestatten, wird die Gruppe dreimal die cyclische Gruppe B_{24} gestatten und ausserdem die Gruppe von CXXVIII viermal und die Gruppe von H_6 6 mal.

Die Zusammenstellung der Gruppen gibt der nächste Paragraph.

§ 8. Die typischen Gruppen von M_8 nach der Methode der Abbildung auf eine Doppelebene.

Wie ich für M_6 und M_7 in §§ 3 und 6 eine gegenüber den §§ 1 und 5 sicherere Methode gegeben habe, so will ich auch für M_8 eine Ableitung geben, welche an Eleganz die viele Details erfordernde Methode des § 7 übertrifft, durch welche sie allerdings vortheilhaft ergänzt wird.

Die Transformationen einer Gruppe von M_8 lassen das C_3-Büschel durch $a_1 \dots a_8$, also auch das ∞^3 System von $C_6\, a_1^2 \dots a_8^2$ und die dazu gehörige Curve D_9 ungeändert, welche ein Bestandtheil der Jacobischen Curve jedes im ∞^3-Systeme enthaltenen Netzes ist. Sie bringen in D_9 eindeutige Correspondenzen hervor und da umgekehrt durch diese die Transformation in 1 oder 2facher Art (i. A.) bestimmt ist[1]), so kommt es also darauf an, Gruppen von eindeutigen Correspondenzen in D_9 zu suchen. Dies ist das Problem der *Gruppen von principalen Transformationen* der Abel'schen Integrale $p = 4$, wobei die algebraische Function noch die im I. Theile § 8 erwähnte Particularisirung besitzt. Dieses Problem der principalen Transformation der ϑ umgangen zu haben, ist eben das Verdienst des vorigen Paragraphen.

Ein anderes Verfahren ist nun, dass durch ein Netz von C_6, welche durch zwei verbundene Punkte $p_1 p_2$ von $\Sigma_2(a_1^6, \dots a_8^6)^{17}$ gehen, die Ebene E in eine zweite Ebene E' übertragen wird, wo als Bild von D_9 eine Uebergangscurve Z_6 mit zwei im Punkte R längs RR' unendlich nahen dreifachen Punkten erscheint und wobei die Transformationen von M_8 sich in quadratische Transformationen Q^2 mit 2 in RR' unendlich nahen Hauptpunkten (eingeschlossen die Collineationen) übertragen[2]). Daher:

Theorem CXXXIV. Das Problem der typischen Gruppen mit 8 (und sogar mit 7, 6) Punkten ist identisch mit dem Probleme der Gruppen quadratischer Transformationen und Collineationen jener Z_6 (oder ihrer Degenerationen) in sich.

Schon aus der Natur der einzelnen Q^2 können Schlüsse auf die Gruppe gemacht werden, weshalb es nöthig ist, jene selbst zu kennen, wobei aber die Vereinfachung eintritt, dass die Transposition $(RR'd)^2$ wo d ein stets vorhandener Doppelpunkt der Q^2 ist, die Q^2 in eine Collineation und allenfalls gleichzeitig Z_6 in eine Z_5 verwandelt. Diese einzelnen Collineationen sind nun[3]):

---

1) Für diese Eigenschaften cf. Acta Math. Bd. XIX. II. Theil § 3.

2) Ibidem.

3) Ibidem. Jedoch möge man n. 3 als hinzugefügt und einige Formen als unwesentlich hinweggelassen bemerken. Ausserdem wird das dortige Theorem XXXVI durch das hier folgende Theorem CXXXV etwas genauer präcisirt.

1. $X_1^3X_3^3+X_1^2(X_2^3X_3+X_2^2X_3^2+X_2X_3^3+X_3^4)+X_1(X_2^4X_3+X_2^3X_3^2+X_2^2X_3^3+X_2X_3^4+X_3^5)$
$+X_2^6+X_2^5X_3+X_2^4X_3^2+X_2^3X_3^3+X_2^2X_3^4+X_2X_3^5+X_3^6$ oder
$X_1^3X_3^2+X_1^2(X_2^2X_3+X_2X_3^2+X_3^3)+X_1(X_2^3X_3+X_2^2X_3^2+X_2X_3^3+X_3^4)+X_2^5$
$+X_2^4X_3+X_2^3X_3^2+X_2^2X_3^3+X_2X_3^4+X_3^5$ $\qquad x_1 : \overline{x}_2 : \overline{\overline{x}}_3$

2. $X_1^3X_3^3+X_1^2(X_2^2X_3^2+X_3^4)+X_1(X_2^4X_3+X_2^2X_3^3+X_3^5)+X_2^6+X_2^4X_3^2+X_2^2X_3^4+X_3^6$
$\qquad x_1 : -x_2 : x_3$

3. $X_1^3X_3^3+X_2^6+X_2^5X_3+X_2^4X_3^2+X_2^3X_3^3+X_2^2X_3^4+X_2X_3^5+X_3^6$ $\qquad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3$

4. $X_1^3X_3^3+X_1^2X_2X_3^3+X_1X_2^2X_3^3+X_2^6+X_2^3X_3^3+X_3^6$ $\qquad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3$

5. $X_1^3X_3^3+X_1^2X_2^2X_3+X_1(X_2^4X_3+X_2X_3^4)+X_2^6+X_2^3X_3^3+X_3^6$ $\qquad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3$

6. $X_1^3X_3^3+X_1X_3^5+X_1^2X_2^2X_3^2+X_2^2X_3^4+X_2^6$ $\qquad x_1 : ix_2 : -x_3$

7. $X_1^3X_3^3+X_2X_3^5+X_1X_2^4X_3+X_1^2X_2^2X_3+X_2^6$ $\qquad \eta^5 = 1, \qquad x_1 : \eta x_2 : \eta^2 x_3$

8. $X_1^3X_3^3+X_2^6+X_2^4X_3^2+X_2^2X_3^4+X_3^6$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \varepsilon x_3$

9. $X_1^3X_3^3+X_2^6+X_1X_2^4X_3+X_1^2X_2^2X_3^2+X_3^6$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3$

10. $X_1^3X_3^3+X_1^2X_3^4+X_1X_3^5+X_2^6+X_3^6$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : x_3$

11. $X_1^3X_3^3+X_1X_2^2X_3^3+X_2^6+X_3^6$ $\qquad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3$

12. $X_1^3X_3^3+X_1X_3^5+X_2^6$ $\qquad x_1 : i\varepsilon x_2 : -x_3$

13. $X_1^3X_2^3+X_2X_3^5+X_2^6$ $\qquad \varepsilon^3 = 1, \ \eta^5 = 1 \qquad x_1 : \varepsilon\eta x_2 : \varepsilon\eta^2 x_3$

14. $X_1^3X_3^2+X_1^2X_2X_3^2+X_1X_2^2X_3+X_1X_3^4+X_2^5+X_2^3X_3^2+X_2X_3^4$ $\qquad x_1 : x_2 : -x_3$

15. $X_1^3X_3^2+X_1X_2^2X_3^2+X_2^5+X_2X_3^4$ $\qquad x_1 : -x_2 : ix_3$

16. $X_1^3X_3^2+X_2^5+X_2^3X_3^2+X_2X_3^4$ $\qquad x_1 : \varepsilon x_2 : -\varepsilon x_3$

17. $X_1^3X_3^2+X_2^5+X_2X_3^4$ $\qquad \varepsilon^3 = 1 \qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : -i\varepsilon x_3$

18. $X_1^3X_3^2+X_2^5+X_1X_3^4$ $\qquad \eta^5 = 1 \qquad x_1 : \eta x_2 : -x_3$

Durch Vergleichung mit den Typen meiner Preisschrift habe ich hieraus gewonnen:

Theorem CXXXV. Die Transformationen von M_8, welche diese Collineationen in E' liefern, sind Σ_2 für n. 1, (ab), $(a_i b_i)$, $(i = 1 \dots 4)$ für n. 2, N_3 und E_6 für n. 3, $\varDelta_3$ und E_6' für n. 4, Collineation und E_6'' für n. 5, E_4 und (cc'), a' in b, b' in a für n. 6, Z_5 und Γ_{10} für n. 7, H_6 und H_6 für n. 8, 11, $B_6 d_1 d_2$ und H_6^1 für n. 9, 10, $B_{12} i_1 i_2$ und B_{12}' für n. 12, B_{15} und B_{30} für n. 13, I_4 für n. 14, $\varDelta_8$ für n. 15, Γ_{12} für n. 16, B_{24} für n. 17, B_{20} für n. 18.[1])

Bemerken wir, dass der Index der Projectivität in X_1 gleich dem Index unter den C_3 des Büschels in E ist, dass ferner die Q^2 und Collineationen einer selben Gruppe aus CXXXIV sämmtlich eine Gerade fest lassen, welche als X_2X_3 genommen werden möge, und diese

1) Die Behauptung in der Preisschrift, dass $(\varDelta_6)$ nicht construirbar ist, ist richtig entgegen der Acta Math. Bd. XIX p. 159 gemachten Correctur, wo Γ_6'' statt $\varDelta_6$ zu setzen ist.

Gerade auch fest bleibt, wenn durch $(RR'd)^2$ übertragen wird, dass die 6 Schnittpunkte von Z_6 mit dieser Geraden oder die 5 von Z_5 nebst deren Punkte auf X_1X_2 unter einander vertauscht werden müssen. Wenn in einer Projectivität der endlichen Gruppe unter den Stralen von X_1 die Gerade X_1X_2 (Tangente RR') fest bleibt, so ist eine Collineation vorhanden, wenn nicht, eine Q^2.

Theorem CXXXVI. Wenn der Index unter den $C_3 > 6$, gehört die Transformation nur ihrer cyclischen Gruppe an.

Denn eine Projectivität Index > 6 kann in keiner anderen Gruppe unter den Stralen von X_1 als nur in der Doppelpyramidengruppe vorkommen. Aber die obigen Formen beweisen, dass bei n. 12. 13. 17 stets auf der festen Geraden X_2^6 oder X_2^5 erscheint, wodurch auch, da diese Gerade fest bleiben muss, die Doppelpyramidengruppe unmöglich ist.

Theorem CXXXVII. Die Ikosaedergruppe unter den C_3 kann nicht auftreten.

Denn dieselbe enthielte eine Projectivität Index 5 unter den Stralen von X_1, also n. 7 oder 13, wo aber jedesmal auf $x_1 = 0$ X_2^6 entsteht, sodass der Index 5 cyclische Gruppen bedingt.

Theorem CXXXVIII. Die Octaedergruppe unter den C_3 ist nur möglich bei n. 16 also bei B_{24}.

Denn bei E_4 können gemäss n. 5 die Schnittpunkte mit $x_2 = 0$ keine Octaedergruppe gestatten. Bei B_{24} erhält man sofort aus $x_1 = 0$, $X_2^5 + X_2X_3^4 = 0$, dass $X_2X_3(X_2^4 + X_3^4)$ die Octaedergruppe gestattet, wo diese natürlich in E' auch aus Q^2, welche Z_5 invariant lassen, bestehen wird. Dass dann $\varDelta_8$ nicht die Gruppe hervorruft, folgt aus meinem Theoreme (Acta Math. XIX. p. 187), wonach zwei Büschel mit gleicher fundamentaler Involution birational äquivalent sind. Dass aber an B_{24} sich wirklich die Octaedergruppe knüpft, folgt daraus, dass Z_6 die Gruppe von Q^2 gestattet. Denn da Q^2 die 5 Punkte auf X_2X_3, und den 5. Punkt auf X_1X_2, unter welchen ihre 2 einfachen Hauptpunkte sind, unter einander transformirt, so transformirt sie auch die Tangenten der Z_5 in diesen Punkten, welche Inflexionstangenten sind, unter einander, also auch das Büschel von C_6, das dieses Sextupel und die $X_1X_2 + X_2X_3$ dreifach enthält, in sich. Es sind also alle C_5 des Büschels invariant, falls Q^2 auf den Doppelstralen in X_1 den Index 3 besitzt.

Gleichzeitig sehen wir, dass bei $\varDelta_8$ der fünfte Punkt an RR' fehlt und die Tangenten aus X_1 in grösserer Anzahl vorhanden sind, dass also $\varDelta_8$ für sich allein eine vollständige Gruppe bestimmt [1]) und auch, wenn particulisirt, nur in B_{24} eintreten kann.

1) Hiernach entscheidet sich die Cr. J. Bd. CXIV p. 103 erwähnte Frage in dem Sinne, dass $\varDelta_8$ nicht nothwendig die Figur von B_{24} besitzt.

Wir kommen zu den Büscheln mit dem Index 6. Dass bei n. 9 die Doppelpyramidengruppe unmöglich ist, folgt daraus, dass auf $X_2 = 0$ $X_1^3 + X_3^3$ entsteht, was C_e bedeutet, während die andere feste Curve nicht C_e ist. n. 9 bildet eine vollständige Gruppe, da auch keine der übrigen Collineationen mit der Form verträglich ist, mit alleiniger Ausnahme der Form $X_1^3 X_3^3 + X_2^6 + X_3^6$.

Die Form n. 11. gestattet stets auch E_6', da in n. 4 nur 2 Coefficienten Null zu machen sind. Ferner beweisen die Formen n. 3. 4. 5. n. 6. 16., dass sie in der allgemeinsten Form cyclischen Gruppen Anlass geben. Wenn n. 3. die Form n. 2. annimmt, so entsteht sofort 9 und zwar in seiner allgemeinsten Form. Dagegen können sich n. 3. 4. 5. in der Form $X_1^3 X_3^3 + X_2^6 + X_2^3 X_3^3 + X_3^6$ begegnen und dies ist also eine Gruppe mit E_6, E_6', E_6'' aus welcher die Formen n. 8. bis n. 11. solange ausgeschlossen sind, als nicht $X_2^3 X_3^3$ verschwindet. Auch die Doppelpyramidengruppe mit Q^2 ist unmöglich, da die festen C_3 eine C_3^3 und eine C_e sind, solange also diese C_e nicht C_3^3 ist, d. i. wie soeben.

Die Form n. 2 kann in eine Gruppe eintreten, wo die 6 Schnittpunkte auf $X_2 X_3$ den Fall n. 1 von CXIV bieten. Da dann Z_6 zwei Doppelpunkte enthält, während um n. 2 zu liefern, keiner vorhanden sein durfte, so wird diese Transformation I_4 werden. Die dritte Q^2 hat wieder keinen Doppelpunkt in Z_6 und führt daher auf eine Form n. 2, also eine Transformation T_2.

Keine der Formen n. 9. 10. 11. ist mit der Doppelpyramidengruppe unter den C_3^3 verträglich, auch nicht von Q^2, da i. A. nur die eine der beiden festen Curven C_e ist. Dagegen liefert die Form $X_1^3 X_3^3 + X_2^6 + X_3^6$ eine Gruppe, in welcher gleichzeitig E_6, E_6', E_6'', H_6, H_6^1, B_6 auftreten und ausserdem jene, welche die beiden festen C_e unter einander vertauschen und je einer Q^2 der Z_6 in sich entsprechen. Zusammenfassend folgt:

Theorem CXXXIX. Die typischen Gruppen mit 8 Punkten sind:

I.	*Die Transformation Σ_2 in ihrer allgemeinsten Form*	$r = 2.$
II.	*Die Transformation T_2: (ab), $(a_i b_i)$, $i = 1 \ldots 4$ mit Σ_2 und $T_2 \cdot \Sigma_2$*	$r = 4.$
III.	*Die cyclische Gruppe von I_4*	$r = 4.$
IV.	*Die Gruppe einer I_4 mit zwei cubischen T_2*	$r = 8.$
V.	*Die Gruppe von E_4 mit Σ_2 und $E_4 \cdot \Sigma_2$*	$r = 8.$
VI.	*Die cyclische Gruppe von Γ_{10} in allgemeinster Form*	$r = 10.$
VII.	*Die cyclische Gruppe von E_6' in der allgemeinsten Form nebst 6 Involutionen*	$r = 12.$
VIII.	*Die cyclische Gruppe von E_6'' in der allgemeinsten Form nebst 6 Involutionen*	$r = 12.$

IX.	*Die cyclische Gruppe von E_6 in der allgemeinsten Form*	$r = 6.$
X.	*Die cyclische Gruppe von B_{20}*	$r = 20.$
XI.	*Die cyclische Gruppe von B_{30}*	$r = 30.$
XII.	*Die cyclische Gruppe von Γ_{12} in der allgemeinsten Form*	$r = 12.$
XIII.	*Die cyclische Gruppe von Δ_8 in der allgemeinsten Form*	$r = 24.$
XIV.	*Die Gruppe von B_6, $d_1 d_2$ in allgemeinster Form mit H_6^1 und Σ_2*	$r = 12.$
XV.	*Die Gruppe von E_6 mit der Doppelpyramidengruppe unter den C_3^3, wo zwei C_e die Scheitelelemente sind*	$r = 54.$
XVI.	*Die Gruppe von H_6 mit E_6*	$r = 36.$
XVII.	*Die Gruppe mit E_6', E_6'' und E_6*	$r = 48.$
XVIII.	*Die Gruppe von E_6 mit einem Sextupel T von C_3^3, welches also die octaedrische Binärgruppe gestattet*	$r = 144.$
XIX.	*Die Gruppe von B_{12}', $B_{12} i_1 i_2$ mit Σ_2*	$r = 24.$
XX.	*Die Gruppe IV mit E_6*	$r = 24.$

XVI bietet den Fall 1. von CXIV, VIII den Fall 4., XVIII den Fall 3., XI den Fall 5., XVII den Fall 6.

§ 9. Die zweideutige Abbildung des quadratischen Kegels.

Benützt man die $C_6 a_1^2 \ldots a_8^2$ eines ∞^3 Systemes als Bilder der Ebenen eines Raumes R_3, so wird das Büschel von $C_3 a_1 \ldots a_8$ die Abbildung der Erzeugenden eines quadratischen Kegels und der 9 Scheitel a_9 das Bild des Scheitels dieses Kegels. Die sämmtlichen birationalen Transformationen, welche die $C_6 a_1^2 \ldots a_8^2$ unter einander transformiren, sind Bilder von Collineationen, welche den quadratischen Kegel in sich transformiren. Eine Gruppe solcher Collineationen muss nicht nur den Scheitel des Kegels fest lassen, sondern auch eine nicht durch den Scheitel gehende Ebene. Die Gruppe reproducirt ausserdem eine Curve 6. Ordnung auf dem Kegel, welcher die Curve D_9 in der Ebene zum Bilde hat und der Schnitt des Kegels mit $\infty'' F_3$ ist. Die internen Homologieen sind also entweder Identitäten oder vom Indexe 3. Erinnert man sich, dass in der Ebene das Bild mit Σ_2 zusammengesetzt werden muss, so erhält man:

Die Gruppen mit 8 Punkten sind meriedrisch isomorph mit den binären Gruppen, in den Graden 2 oder 3 oder 6.

Die Uebertragung der Thatsache, dass im Raume eine Ebene und somit ein Kegelschnitt fest bleibt (cf. dieses Buch II. Theil § 2), liefert:

Theorem CXL. Jede irreductible Gruppe mit 8 Punkten transformirt nicht nur eine Curve $D_9 a_i^3$, sondern auch eine Curve $D_6 a_i^2$ in sich.

Umgekehrt ist durch eine solche Curve und die Correspondenzen, welche sie trägt, die Gruppe der Transformationen bestimmt.

§ 10. Aufzählung der sämmtlichen Typen vollständiger endlicher Gruppen birationaler Transformationen.

Die §§ 5, 7, 8 mit den Resultaten des II. Theiles liefern endlich das Schlussresultat, wobei statt birationaler Transformationen »eindeutiger« gesetzt werden kann, weil einfach rationale Transformationen überhaupt nicht periodisch sein können.

Theorem CXLI. Alle endlichen vollständigen Gruppen ebener birationaler Transformationen sind birational äquivalent einem von 61 Typen. Diese sind:

I. **Eine Gruppe von Collineationen, welche drei Geraden unter einander vertauscht (oder einer Gruppe von Collineationen, welche einen Punkt und eine nicht incidente Gerade ungeändert lassen)** [1]

II. **Eine Gruppe von Collineationen, welche auf einem Kegelschnitte eine Ikosaëdergruppe hervorruft** $r = 60$

III. **Die Gruppe von Collineationen, welche eine harmonische Curve 3. Ordnung in sich transformirt** $r = 36$

IV. **Die Gruppe von Collineationen, welche ein Paar syzygetischer harmonischer Curven 3. Ordnung nur unter sich transformirt** $r = 54$

V. **Die Gruppe von Collineationen, welche das syzygetische Büschel von Curven 3. Ordnung in sich transformirt** $r = 216$

VI. **Die Gruppe von Collineationen, welche die biquadratische Curve $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$ in sich transformirt** $r = 168$

VII. **Eine Gruppe von Transformationen de Jonquières's mit gemeinsamem Punkte (ab), wo die Gruppe unter den Geraden von (ab) der Kreistheilungstypus oder**

VIII. **der Doppelpyramidentypus oder**

IX. **die Gruppe des Tetraeders oder**

X. **die Gruppe des Octaeders oder**

XI. **die Gruppe des Ikosaeders ist,**

XII. **Eine Gruppe quadratischer Transformationen mit gemeinsamen Punkten (ab'), (ba')**

XIII. **Eine Gruppe von quadratischen Transformationen mit drei gemeinsamen Hauptpunkten, welche jedes der drei Stralbüschel fest lassen oder zwei derselben unter einander vertauschen oder alle drei Stralbüschel unter einander vertauschen**

---

1) Die 2. Gruppe von I sowie die 2 ersten Gruppen aus XIII sind eigentlich als partikuläre Fälle in den Gruppen VIII bis XII enthalten.

XIV. **Die Gruppe quadratischer Transformationen mit 4 Punkten** $r = 120$

XV. **Die Gruppe quadratischer und cubischer Transformationen mit 5 Punkten, welche willkürlich sind, oder** $r = 15$

XVI. **einen Doppelpunkt und zwei involutorische Paare einer Collineation bilden oder** $r = 30$

XVII. **ein cyclisches Tripel und zwei Doppelpunkte einer Collineation bilden oder** $r = 90$

XVIII. **ein cyclisches Quadrupel und einen Doppelpunkt einer Collineation bilden oder** $r = 60$

XIX. **ein cyclisches Quintupel einer Collineation bilden** $r = 150$

XX. **Die Gruppe über zwei syzygetischen Tangentialtripeln einer willkürlichen C_3 d. i. mit B_6 [I_6] [1])** $r = 54$

XI. **Die Gruppe über zwei syzygetischen Tangentialtripeln einer harmonischen C_3 d. i. mit B_{12} [III_{12}]** $r = 108$

XXII. **Die Gruppe über zwei syzygetischen Tangentialtripeln einer äquianharmonischen C_3 oder die äquivalente Gruppe mit B_9 [II_9]** $r = 648$

XXIII. **Die Gruppe mit Γ_6 [XIV_6]** $r = 12$

XXIV. **Die Gruppe über dem Clebschischen Sechsecke** $r = 120$

XXV. **Die Gruppe über zwei dreifach perspectiven Dreiecken** $r = 12$

XXVI. **Die Gruppe über einem Quadrupel und einem involutorischen Paare einer Collineation** $r = 8$

XXVII. **Die Gruppe über dem sechsfach Brianchonschen Sechseck** $r = 24$

XXVIII. **Die cyclische Gruppe von B_{18} [VI_{18}]** $r = 18$

XXIX. **Die Gruppe, welche B_{14} [IV_{14}] enthält** $r = 336$

XXX. **Die Gruppe, welche B_{12} [III_{12}] und B'_{12} [V_{12}] enthält** $r = 144$

XXXI. **Die Gruppe, welche (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c; d_1 d_2 enthält** $r = 192$

XXXII. **Die cyclische Gruppe von Γ'_6 [XV_6] in allgemeinster Form** $r = 6$

XXXIII. **Die cyclische Gruppe von Γ''_6 [XVI_6]** $r = 6$

XXXIV. **Die cyclische Gruppe von Γ'_6 mit drei Involutionen** $r = 12$

XXXV. **Die allgemeinste E_4 [XXXIV_4]** $r = 32$

XXXVI. **Die Gruppe von B_6, d_1 mit Θ_2** $r = 12$

XXXVII. **Die Untergruppe von XXXIV, welche 15 Involutionen enthält, mit Θ_2** $r = 96$

XXXVIII. **Die allgemeine Gruppe von 7 Involutionen mit Θ_2** $r = 16$

XXXIX. **Die allgemeine Gruppe von 3 Involutionen mit Θ_2** $r = 8$

XL. **Die cubische Involution allein mit Θ_2** $r = 4$

XLI. **Θ_2 [XLIII_2] in ihrer allgemeinsten Form** $r = 2$

XLII. **Die cyclische Gruppe von I_4 in der allgemeinsten Form** $r = 4$

XLIII. **Die cyclische Gruppe von Γ_{10} in der allgemeinsten Form** $r = 10$

---

1) Die römischen Ziffern in Klammern [ ] innerhalb des Textes beziehen sich auf die Tafel p. 108.

XLIV. **Die cyclische Gruppe von E_6 [XXXV$_6$] in der allgemeinsten Form** $r = 6$

XLV. **Die cyclische Gruppe von E'_6 [XXXVI$_6$] in der allgemeinsten Form** $r = 12$

XLVI. **Die cyclische Gruppe von E''_6 [XXXVII$_6$] in der allgemeinsten Form** $r = 12$

XLVII. **Die cyclische Gruppe von B_{20} [VIII$_{20}$]** $r = 20$

XLVIII. **Die cyclische Gruppe von B_{30} [X$_{30}$]** $r = 30$

XLIX. **Die cyclische Gruppe von Γ_{12} [XVIII$_{12}$] in der allgemeinsten Form** $r = 12$

L. **Die cyclische Gruppe von Δ_8 [XXVIII$_8$] in der allgemeinsten Form** $r = 24$

LI. **Σ_2 [XLVIII$_2$] in ihrer allgemeinsten Form** $r = 2$

LII. **Die Transformation T_2: (ab), $(a_i b_i)$ $i = 1 \ldots 4$ mit Σ_2 und $T_2 . \Sigma_2$** $r = 4$

LIII. **Die Gruppe von E_4 [XXXIV$_4$] mit Σ_2 und $E_4 . \Sigma_2$** $r = 8$

LIV. **Die Gruppe von einer I_4 [XLV$_4$] mit zwei cubischen T_2** $r = 8$

LV. **Die aus B_{12}, $d_1 d_2$; B'_{12} [V$_{12}$] und Σ_2 [XLVIII$_2$] zusammengesetzte Gruppe** $r = 48$

LVI. **Die Gruppe aus B_6, $d_1 d_2$ mit H^1_6 [XL$_6$] und Σ_2 in allgemeinster Form** $r = 12$

LVII. **Die aus H_6 [XXXIX$_6$] mit E_6 zusammengesetzte Gruppe** $r = 36$

LVIII. **Die Gruppe LIV mit E_6** $r = 24$

LIX. **Die aus E'_6 mit E_6 und E''_6 zusammengesetzte Gruppe** $r = 48$

LX. **Die Gruppe von E_6, deren C^3_3 ein cyclisches Sextupel bilden** $r = 54$

LXI. **Die Gruppe von E_6 mit einem Sextupel von C^3_3, welche eine Binärform T bilden, also die octaedrische Gruppe gestatten d. i. die Gruppe mit B_{24} [IX$_{24}$].** $r = 144$

In dieser Aufzählung sind zu unterscheiden 8 Classen von Gruppen und 53 isolirte Typen. Von den Classen ist die Collineationsgruppe I. von H. Jordan, die übrigen 7 sind von mir entdeckt, theilweise überhaupt zuerst, theilweise in dieser Vollständigkeit. Von den isolirten Typen sind 4 Collineationsgruppen von H. Jordan, 1 von H. Klein, 2 sind Θ_2, Σ_2, von welchen der eine seit sehr langer Zeit bekannt ist, der andere von Bertini herrührt, 6 Typen quadratischer und cubischer Transformationen (XIV—XIX) stimmen mit den von Autonne gerechneten Gruppen überein[1]), die übrigen 40 Typen sind zum ersten Male in der gegenwärtigen Arbeit entdeckt und veröffentlicht.

1) Ich habe schon am Ende des II. Theiles (S. »Ad notam«) angegeben, dass ich auch jene 6 (quadratischen und cubischen) Gruppen und in ihrer Bedeutung als Typen seit längerer Zeit gekannt habe.

1893—1894.

Noten.

Ad p. 7 u. p. 39. (Dies ist die auf p. 7 letzte Zeile bezogene Anmerkung.) — Wie sehr es nöthig ist, den algebraischen vom arithmetischen Theile zu unterscheiden, zeigen die folgenden Beispiele. Wenn eine Gruppe von Transformationen gegeben ist, so kann man sich denken, dass ein einfacher Punkt der Ebene durch alle Characteristiken unveränderlich sei, während die wirklichen Transformationen der Gruppe keinen Punkt ganz unveränderlich lassen. So kann es geschehen, dass eine Gruppe von Transformationen keine Reduction gestattet, während die Gruppe ihrer Characteristiken diese Reduction gestattet.

Andererseits weiss man, dass für jede endliche Gruppe von Transformationen invariante Curven existiren. So könnte man sich für die Gruppe von Characteiristken eine invariante Curve und sogar eine invariante rationale C_3 denken. Aber dies würde zu dem Schlusse leiten, dass die Gruppe auf der C_3 eine endliche Gruppe von Correspondenzen bewirkt, welche, da sie sich in einem rationalen binären Gebiete befindet, einer der 5 bekannten Gruppen isomorph sein müsste, was nicht der Fall sein muss.

Ad p. 31 Schluss des § 6. — Die Subtotalgruppe kann verallgemeinert werden, indem man eine Anzahl Elemente in zwei (oder weiterhin in mehrere) Classen theilt und festsetzt, dass die Substitutionen unter denselben gewissen, allenfalls sogar complicirten arithmetischen Bedingungen bezüglich der *Anzahl* der Uebergänge aus einer Elementenclasse in die andere zu genügen haben.

Ad p. 39 am Ende. — Die Totalgruppe der Substitutionen 2. Art unter N Punkten ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Permutationen, welche die Combinationen von n Buchstaben zu geraden Classen $2i$ mit der Einschränkung vertauschen, dass der Werth $2i + 2i' - j$, wo j die Zahl der zwei Combinationen gemeinsamen Buchstaben, erhalten bleibt.

Ad p. 76. — Beweis von Theorem LXIII. Die C_6 liegen zu je dreien auf einem Kegel mit X_4 als Spitze. Die C_3 in einem Ebenenbüschel, dessen Axe g in $X_1 X_2 X_3$ ist, werden von X_4 in C_3 eines Büschels projicirt, in welchem L und die dreimal gezählte Gerade g vorkommt. Die Hesseschen Curven dieser C_3 bilden selbst ein Büschel, berühren sich in dem conjugirten Tripel $s_1 s_2 s_3$ des von den Doppelpunkten $d_1 d_2 d_3 d_4$ gebildeten vollständigen Viereckes und gehen durch die Schnittpunkte von g mit den Geraden $s_2 s_3$, $s_3 s_1$, $s_1 s_2$. Es gibt eine C im Büschel n. 17, welche $s_2 s_3 + s_3 s_1 + s_1 s_2$ als Hessesche Curve hat, also 3 C_6 im räumlichen Büschel. Soll nun in der Ebene die C_6 auch noch mit $3g$ zusammenfallen, so muss ein Theil des Tripels $s_1 s_2 s_3$ auf g fallen, es müssen zwei Seiten des Basisvierseites coincidiren, oder auf g müssen zwei correspondirende Punkte der Hesseschen Curve sein. Dann ist aber g eine Tangente der Cayleyschen Curve.

Ad p. 57. Th. XVII u. p. 105 n. XXIII. Bezüglich der syzygetischen Tangentialtripel cf. meine Arbeit: »Ueber eine ein-dreideutige Abbildung einer Fläche 3. Ordnung« (Cr. J. Bd. XCV).

Ad p. 98. Es sei noch auf die im letzten § meiner Preisschrift behandelten Tangentialgruppen hingewiesen, welche aus den Gruppen M_8 entstehen, indem statt zweier entsprechender Pnnkte ihre Tangentialpunkte auf ihren C_3 entsprechend gemacht werden. Diese, sowie die allgemeineren, wo statt der Tangenten tangirende Curven eines homaloidalen Netzes benützt sind, sind stets der Originalgruppe birational äquivalent.

Tafel der isolirten Typen eindeutiger periodischer Transformationen.

(Journal f. Math. Bd. CXIV p. 87.)

I_6	b' in c, c' in a, a' in b	$(x-1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1), \dots B_6$
II_9	(ab'), a' in c, c' in c_1' in b	$(x-1)(x^6+x^3+1), \dots B_6$
III_{12}	(ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in c	$(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2+x+1), \dots B_{12}$
IV_{14}	(ab'), a' in c, c' in c_1' in c_2' in b	$(x-1)(x^7+1), \dots B_{14}$
V_{12}	(ab'), a' in a_1' in c, c' in c_1' in b	$(x^2-1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1), \dots B_{12}'$
VI_{18}	(ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in a_3' in c	$(x^2-1)(x^6-x^3+1), \dots B_{18}$
VII_{15}	b' in c, c' in c_1' in a, a' in a_1' in b	$(x-1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1), \dots B_{15}$
VIII_{20}	(ab'), a' in a_1' in c, c' in c_1' in c_2' in b	$(x-1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1), \dots B_{20}$
IX_{24}	(ab'), a' in c, c' in c_1' ln c_2' in c_3' in b	$(x-1)(x^8-x^4+1), \dots B_{24}$
X_{30}	(ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in a_3' in a_4' in c	$(x-1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1), \dots B_{30}$
(XI_{12})	(ab'), a' in c, c' in b	$(x-1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x+1), \dots (B_{12})$
(XII_{18})	b' in c, c' in a, a' in a_1' in a_2' in b	$(x-1)(x^6-x^3+1)(x^2-x+1), \dots (B_{18})$
(XIII_{30})	b' in c, c' in a, a' in a_1' in b	$(x^2-1)(x^2-x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1), \dots (B_{30})$
XIV_6	(ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in a_4	$(x^2-1)(x+1)(x^2-x+1)^2, \dots \Gamma_6$
XV_6	b_1 in a, b in a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	$(x-1)(x^2-x+1)^2(x+1)^3, \dots \Gamma_6'$
XVI_6	b_1 in a, b in a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$	$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)^2, \dots \Gamma_6''$
XVII_{10}	b_1 in a, b in a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 in a_4	$(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)^2, \dots \Gamma_{10}$
XVIII_{12}	(ab_1), (ba_1), b_3 in a_4, b_4 in a_2, b_2 in a_3	$(x-1)(x^4-x^2+1)^2, \dots \Gamma_{12}$
(XIX_{12})	b_1 in a, b in b' in a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	$(x-1)(x^2-x+1)^2(x^2+1)^2, \dots (\Gamma_{12})$
(XX_{12})	b_1 in a, b in b' in a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$	$(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)^2, \dots (\Gamma_{12}')$
(XXI_{12})	(ab_1), (ba_1), b_2 in a_2, b_3 in a_3, b_4 in a_4	$(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2+1)^2, \dots (\Gamma_{12}'')$
(XXII_8)	(ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, b_3 in a_3, b_4 in a_4	$(x^8-1), \dots (\Gamma_8)$
(XXIII_{10})	(ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in b_4' in a_4	$(x-1)(x+1)^3(x^4-x^3+x^2-x+1), \dots (\Gamma_{10})$
(XXIV_{18})	(ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in b_4' in b_4'' in a_4	$(x-1)(x^6-x^3+1)(x+1)^2, \dots (\Gamma_{18})$
(XXV_{30})	b_1 in a, b in a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in a_4	$(x-1)(x^2-x+1)(x+1)^2(x^4-x^3+x^2-x+1), \dots (\Gamma_{30})$
(XXVI_{14})	(ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, b_3 in a_3, b_4 in b_4' in a_4	$(x^2-1)(x^7+1), \dots (\Gamma_{14})$
XXVII_3	$(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_2)$, $(e_2 \delta_3)$, $(e_3 \delta_1)$	$(x-1)(x^2+x+1)^3, \dots \Delta_3$
XXVIII_8	$(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(e_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, δ_2 in e_1, δ_3 in d_3	$(x-1)(x^4+1)^2, \dots \Delta_8$

(XXIX$_6$) $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, δ_1 in e_3
$(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2, \ldots (\Delta_6)$

(XXX$_9$) $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, δ_3 in e_2, δ_1 in e_3
$(x-1)(x^6+x^3+1)(x^2+x+1), \ldots (\Delta_9)$

(XXXI$_{12}$) $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, δ_1 in δ_1' in e_3
$(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x+1)^2, \ldots (\Delta_{12})$

(XXXII$_6$) (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)
$(x-1)(x^2-x+1)(x+1)^5, \ldots (\Delta_6^1)$

(XXXIII$_{10}$) (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), b_6 in a_6
$(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)^4, \ldots (\Delta_{10}^1)$

XXXIV$_4$ $(c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, $(b_1\beta_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$(x^2-1)(x^2+1)^2(x+1)^2, \ldots E_4$

XXXV$_6$ γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_2)$, $(b_2\alpha_3)$, $(b_3\alpha_1)$, $(a_1\beta_2)$, $(a_2\beta_3)$, $(a_3\beta_1)$
$(x-1)(a^2-x+1)^4, \ldots E_6$

XXXVI$_6$ γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_2)$, $(b_2\alpha_3)$, $(b_3\alpha_1)$, $(a_1\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$(x-1)(x^2-x+1)^3(x+1)^2, \ldots E_6'$

XXXVII$_6$ γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_1)$, (b_2a_2), (b_3a_3), $(a_1\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$(x-1)(x^2-x+1)^2(x+1)^4, \ldots E_6''$

(XXXVIII$_8$) $(c\alpha_1)$, γ in a_1, $(b_1\beta_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$= (c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, β_1 in b_1, $(b_i\alpha_i)$, $(a_i\beta_i) = (c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, $(b_1\beta_1)$,
α_2 in b_2, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$ $(x-1)(x^4+1)(x+1)^4, \ldots (E_8)$

XXXIX$_6$ γ_1 in c_1, $(c_2\beta_1)$, $(a\gamma_2)$, $(b_1\alpha)$, $(b_2\beta_3)$, $(b_3\beta_4)$, $(b_4\beta_2)$
$(x-1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2, \ldots H_6$

XL$_6$ $(a_1\delta)$, $(b\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$, $(a_4\beta_4)$, $(c_1\alpha_1)$, $(c_2\alpha_2)$, $(c_3\alpha_3)$
$(x-1)(x^2+x+1)^2(x+1)^4, \ldots H_6^1$

XLI$_5$ $(d\alpha_1)$, $(a_1\delta)$, $(b_1\beta_2)$, $(c_1\beta_1)$, $(b_3\gamma_1)$, $(b_2\beta_3)$, $(c_2\alpha_2)$, $(a_2\gamma_2)$
$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)^2, \ldots Z_5$

(XLII$_{12}$) γ_1 in c_1, $(c_2\alpha)$, $(a\gamma_2)$, $(b_1\beta_2)$, $(b_2\beta_3)$, $(b_3\beta_4)$, $(b_4\beta_1)$
$(x-1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x+1)^2, \ldots (H_{12})$

XLIII$_2$ $(c_i\gamma_i)$, $(i=1,\ldots,7)$ $(x-1)(x+1)^7, \ldots \Theta_2$

(XLIV$_6$) $(c_1\gamma_1)$, $(c_2\gamma_2)$, $(c_3\gamma_3)$, $(c_4\gamma_4)$, $(c_5\gamma_5)$, $(c_6\gamma_6)$, γ_7 in c_7
$(x-1)(x+1)^6(x^2-x+1), \ldots (\Theta_6)$

XLV$_4$ $(b_1\delta_1)$, $(b_2\delta_2)$, $(b_3\delta_3)$, $(c_1\gamma_1)$, $(c_2\gamma_2)$, $(c_3\gamma_3)$, $(d\beta)$, $(e\alpha)$ $(x-1)(x^2+1)^4, \ldots I_4$

(XLVI$_4$) $(e_1\gamma_1)$, $(e_2\alpha)$, $(c_1\gamma_2)$, $(b\delta_1)$, $(c_2\delta_2)$, $(c_3\delta_3)$, $(c_4\delta_4)$, $(c_5\delta_5)$
$(x-1)(x^2+1)^2(x+1)^4, \ldots (K_4)$

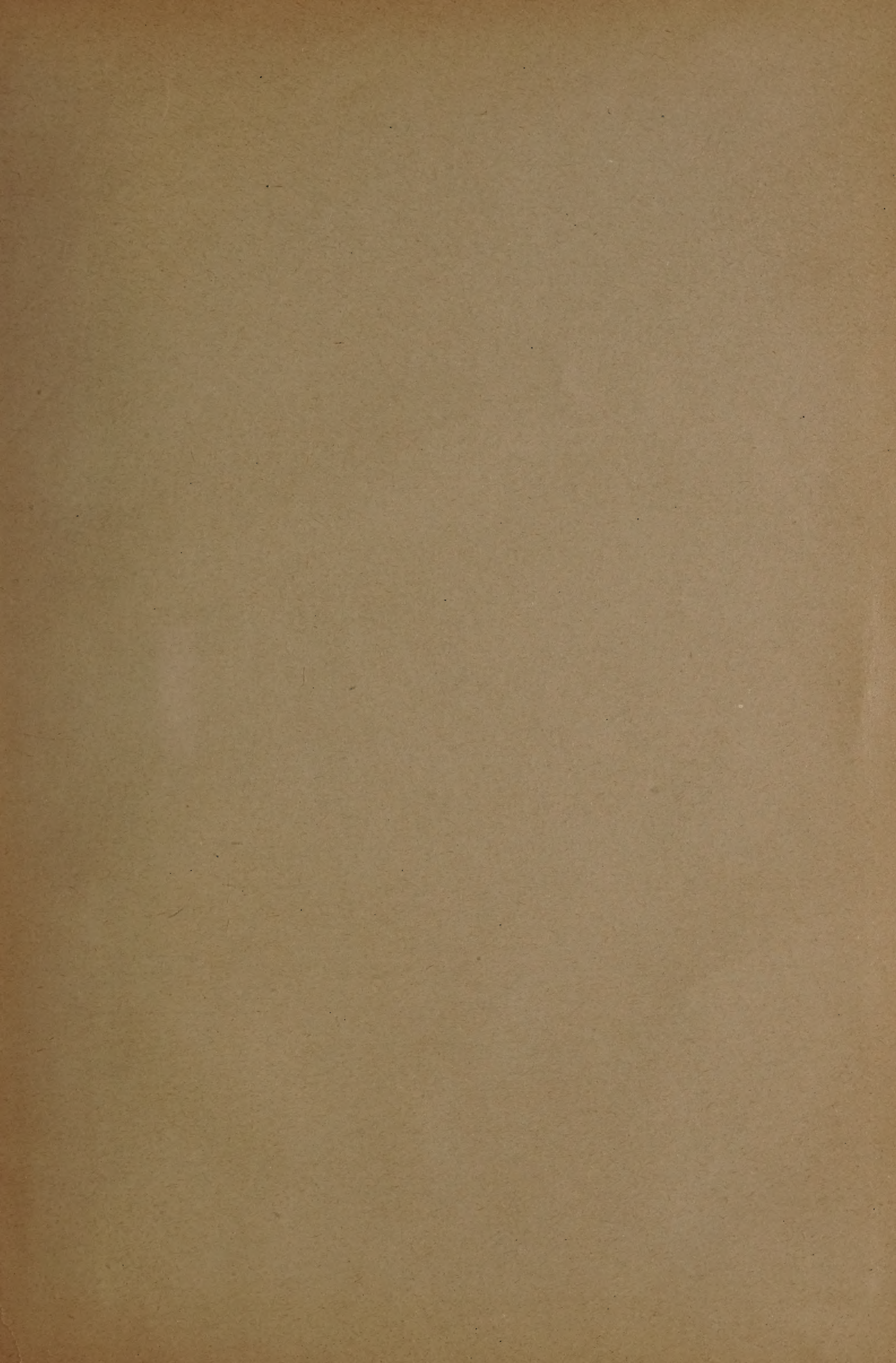
XLVII$_3$ $(f\gamma)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_3\delta_1)$, $(c\eta)$, $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$
$(x-1)(x^2+x+1)^4, \ldots N_3$

XLVIII$_2$ $(f_i\eta_i)$, $(i=1,\ldots,8)$ $(x-1)(x+1)^8. \ldots \Sigma_2$

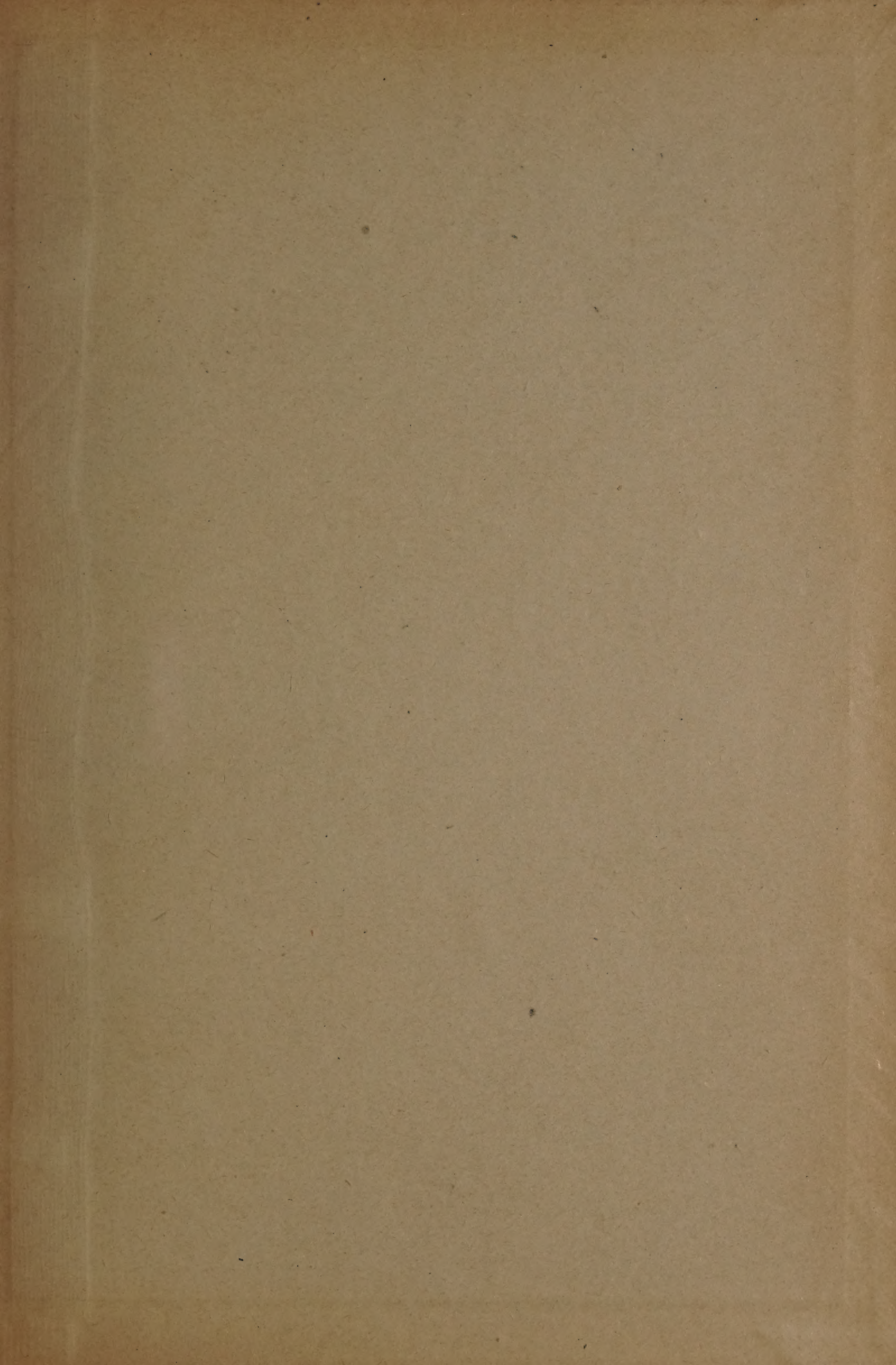
Inhalt.

Druckfehler: p. 4 Zeile 5 v. o. lese man r statt v, Zeile 4 v. u. 8 statt 7, p. 48 § 4 statt § 3.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei von W. Fr. Kästner.








UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
514.7K13T
C002
THEORIE DER ENDLICHEN GRUPPEN VON EINDEU
3 0112 017116812